

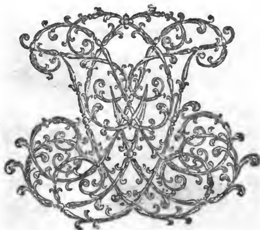
INSTITUZIONI GEOMETRICHE

DEL REVERENDISS. PADRE ABATE

D. GUIDO GRANDI

CAMALDOLESE

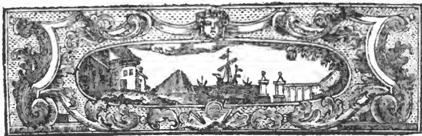
PROFESSORE DI MATEMATICA
NELL' UNIVERSITA' DI PISA.



IN FIRENZE NELLA STAMPERIA DI S. A. R.

Per Gio: Gaetano Tartini, e Santi Franchi.

CON LICENZA DE' SUPERIORI MDCCXXXXI.



PREFAZIONE.



Olti furono gli antichi Autori, che in diverse maniere proposero già gli Elementi di Geometria, cioè Ipocrate Chio, Leonzio, Eudosso Gnidio, Teudio Magnete, e più abbondantemente de' mentovati Ermotimo Colofonio, vinto però anch' esso, e di gran lunga superato da Euclide, il quale con miglior metodo, con maggior chiarezza, e con più esatte dimostrazioni degli altri gli distese; laonde furono abbandonate, e si perderono le Instituzioni matematiche de' sopraddetti Scrittori, e ciascuno s' appigliò a quelle di Euclide, le quali sono state

ſempre meritamente applaudite da tutti i Matematici antichi, e moderni.

Sono paſſati circa a venti ſecoli, da che furono pubblicati gli Elementi di Euclide, ed in queſto tempo da diverſi illuſtri, e celebri Geometri molte altre famoſe ſpeculazioni ſono ſtate ritrovate, che hanno ſomminiſtrato agl' intendenti non piccolo campo di far nuove Inſtituzioni Elementari più compendioſe, corredate di Teoremi ancora più generali di quelli di Euclide, ed arricchite di Propoſizioni da eſſo non dimoſtrate.

E quantunque interrogato una volta l'iſteſſo Euclide dal Re Tolomeo, ſe poteſſe trovarſi una via più compendioſa di quella, che era propoſta ne' libri de' ſuoi Elementi, riſpondeſſe, che non poteva aſſegnarſi nè più nobile, nè più regia di quella da lui inventata; non oſtante ſono di parere, che ciò poteſſe per avventura verificarſi in quel tempo, ma non già dopo il decorſo di due mila anni, nel qual tempo ſendo ſtate fatte grandiſſime ſcoperte in queſta ſublimiſſima Scienza, non vi ha dubbio, che non poſſa eſſere ſtato immaginato, e diſteſo un metodo più facile, più breve, e forſe ancora più comodo di quello tenuto da Euclide. Abba-

ſtan-

ſtanza vien ciò comprovato dalle molte Inſtituzioni Geometriche divulgate di tempo in tempo, e propoſte da varj dottiſſimi Matematici, tra' quali ſi poſſono annoverare il Borelli, il Fabri, l' Arnaldo, il Duca di Burgundia, il Pardies, lo Sturmio, il Guarini, il Marchetti, il Crouſaz, il Wolfio, ed altri, le quali ſono ſtate ricevute ſempre con ſomma lode, ed applauſo da tutta la Repubblica Letteraria. Laonde io pure moſſo dal loro eſempio, ho determinato di far pubbliche queſte mie nuove Inſtituzioni, luſingandomi, che debbano anch' eſſe incontrare l' approvazione, e l' aggradimento degl' intendenti.

Per non prolungarle di ſoverchio, non ho poſto in eſſe tutte le nuove proprietà geometriche, che da me ſono ſtate ritrovate, ma quelle ſolo, che ho creduto più neceſſarie agli ſtudenti ſcolari, non potendo nè pur io in queſta troppo grave età, e con la mente alquanto affaticata attender di propoſito a raccoglierle tutte inſieme da' miei ſcritti, e diſporle con ordine bene adattato a queſti Elementi.

Sembrerà forſe a taluno coſa nuova l' aver io poſti gli Aſſiomi avanti alle Definizioni, alterando

do in cotal guiſa il metodo d' Euclide; ma ſiccome nelli Scolj da me addotti alle Definizioni, mi ſervo di queſti Aſſiomi, perciò ho ſtimato bene di ſervirmi di queſta diſpoſizione, che voglio ſperare non debba eſſermi diſapprovata.

Ho diviſo queſte Inſtituzioni in tre parti; la prima riguarda la materia trattata da Euclide ne' primi quattro libri; la ſeconda concerne ciò, che dal medeſimo vien dimoſtrato nel quinto, e nel ſeſto; e la terza comprende la dottrina da eſſo ſpiegata nell' undecimo, duodecimo, e decimoterzo libro.

Ciaſcuna di queſte tre parti comprende poche Propoſizioni, avendole eſteſe con molti Corollarj ad altre aſſerzioni conſeguentemente dimoſtrate. Se con tal metodo io abbia pienamente conſeguito il fine da me bramato, il vedranno i corteſi Leggitori, al prudente intendimento de' quali, ed al retto giudizio de' dottiſſimi Matematici io totalmente mi rimetto.

INSTITUZIONI GEOMETRICHE
PARTE PRIMA.

ASSIOMI.

I. LE cose uguali a una terza sono uguali ancora fra loro.

II. Di due cose uguali se una è maggiore, o minore di qualche terza quantità, l'altra ancora sarà maggiore, o minore di essa terza; e se una terza quantità è maggiore, o minore della prima di due altre uguali, sarà parimente maggiore, o minore della seconda.

III. Ad uguali quantità aggiungendo una stessa quantità comune, o altrettante quantità, tra di loro uguali, si faranno pure esse somme uguali; e dalle uguali detraendo qualche comune porzione, o altrettante parti uguali, le residue rimangono pure tra loro uguali,

IV. Alle quantità disuguali aggiunta una comune, o altrettante uguali, si fanno pure somme disuguali; ed ancora levando dalle disuguali una stessa comune porzione, o altrettante parti tra loro uguali, le residue rimarranno pure disuguali.

V. Le quantità, che soprapposte l'una all'altra, si combaciano esattamente, senza veruno eccesso, o difetto dell'una dall'altra, sono uguali;

purchè non ſolamente il ſenſo (che potrebbe non avvertirne il preciſo adattamento) ma la ragione moſtri dover ciò ſuccedere.

VI. Il tutto è ſempre maggiore di qualunque ſua parte; ed è il tutto uguale a tutte le ſue parti preſe inſieme.

VII. Se il doppio d'una quantità è maggiore, o minore, o uguale al doppio d'un altra quantità, ancora quella prima ſemplice quantità ſarà maggiore, minore, o uguale all'altra ſemplice; e lo ſteſſo può dirſi de' tripli, o altri ugualmente moltiplici di altre ſemplici quantità, che ſecondo quelli ſaranno tra di loro uguali, o l'uno maggiore, o minore dell'altro, ancora queſte ſemplici ſaranno uguali, o la prima maggiore, o reſpettivamente minore della ſeconda.

VIII. Similmente le quantità doppie, o triple, o ugualmente moltiplici d'una medeſima, o di altre tra di loro uguali, debbono eſſere quelle pure uguali tra loro.

DEFINIZIONI.

TAV. I. FIG. I. I. *Corpo* diceſi quella quantità, che ha tre dimenſioni, in lunghezza, in larghezza, e in profondità.

II. *Superficie* è l'eſtremità del Corpo diſteſa ſolamente in lunghezza, ed in larghezza, non in profondità.

III. *Linea* è l'eſtremità della ſuperficie, che ſolo in lungo diſtendeſi, ſenza veruna larghezza, o groſſezza.

IV. *Punto* è l'eſtremo della linea, ſenza veruna eſtenſione.

SCO-

SCOLIO I.

I. *Per esempio, nel dado* AE *stendesi la di lui mole nella lunghezza* FE, *nella larghezza* FG, *e nella profondità, o altezza* FC; *e questo dicesi* Corpo, *o ancora* Solido, *che ancora può avere disuguale estensione in ciascheduna parte, come un tronco* ADEFG, *in cui è maggiore la lunghezza* FE *della lunghezza* CD, *la larghezza* FG *è maggiore di* CA, *la profondità in* CF *può essere maggiore della profondità in* BH &c. *non essendo necessario, che il corpo abbia per qualunque verso, in ciascheduna parte, una uguale estensione.* FIG. 1. FIG. 2.

II. *Perchè poi da noi non si trova alcun corpo d' infinita grandezza, ma si vede ognuno terminato, conviene discernere quelle estremità, che lo limitano, oltre le quali più non si estende; e queste sono le* Superficie *di esso Corpo, quali per esempio sono le facce laterali* AF, FD, DH, HA, *e la suprema* BC, *e l' infima* FH, *le quali hanno bensì estensione in lunghezza, e in larghezza, ma non in profondità, non avendo grossezza alcuna; altrimenti non sarebbero puri termini del corpo, ma parti del medesimo.*

III. *Inoltre, perchè le stesse superficie non sono infinitamente estese, ma limitate, debbono avere le loro estremità, che sono le* Linee; *come la superficie* AD *vedesi limitata dalla parte destra, e dalla sinistra, con le linee* BD, AC, *siccome delle parti d' avanti, e di dietro con le linee* CD, AB, *nelle quali ritrovasi la sola estensione in lunghezza, ma non veruna larghezza, altrimenti sarebbero* FIG. 3.

ancor eſſe parti di ſuperficie, e non puri confini di eſſa.

IV. *Finalmente, non eſſendo qualunque linea prolungata in infinito, dovrà eſſere terminata, e non immenſa, le di cui eſtremità ſaranno li* Punti, *d'* FIG. 4. *onde principiano, e dove finiſcono: come nella linea* AB *li due termini ſono i punti* A, B; *e nella linea* CD *ſono gli eſtremi punti* C, D, *ne' quali non deve trovarſi ſpecie veruna di eſtenſione, perchè ſe aveſſero qualunque piccola lunghezza, ſarebbero lineette, e non termini di eſſe linee.*

V. *Si potrebbe però da taluno conſiderare, che in una ſuperficie globoſa, benchè non ſia infinita, non poſſono accennarſi le linee, che ſono i ſuoi termini; ed ancora in una linea rotonda, che ritorni in ſe ſteſſa, quantunque finita, non potervi aſſegnare i punti, da cui ſia terminata. Al che baſterà riſpondere, che in qualunque ſito ſegandoſi il corpo di una palla, verrà ſegata ancora la ſuperficie globoſa di eſſa con una linea curva, la quale ſarà il termine di quelle parti di ſuperficie, che vengono diviſe da eſſa; e parimente ſegando una ſuperficie circondata da quella linea rotonda, ſi determineranno li punti, che ſono termini delle parti di quella curva, che ritornava in ſe ſteſſa, e che reſta diviſa per queſto taglio della ſuperficie in due porzioni terminate da eſſi punti.*

DEFINIZIONI.

FIG. 5. V. Di tutte le linee, come *ACB*, *AEB* terminate negli ſteſſi punti *A*, *B*, la più breve di tutte, che è *AB*, diceſi *Linea Retta*; le altre poi

poi ſono *Curve*, o compoſte di più curve, di più rette, o di qualche retta, oppure di qualche curva conneſſa a quella.

VI. Di tutte le ſuperficie, che poſſono terminare nelle medeſime linee *AC*, *BD*, la minima di tutte *ACDB* diceſi *Superficie Piana*; l'altre, come *CFBDA*, ovvero *AEBDHC*, ſono *Curve*, o compoſte di più curve, o di più piane, ovvero di curve congiunte con piane. FIG. 6.

VII. Diceſi *Figura* qualunque ſpazio, che da uno, o da più termini, per ogni verſo, rieſca circoſcritto.

VIII. Quella figura, che da tre linee rette ſia compreſa, diceſi *Triangolo Rettilineo*.

SCOLIO II.

I. D*Ue ſole rette linee non poſſono fare una figura, perchè o ſono del tutto ſtaccate, come* AB, CD, *tra le quali rieſce lo ſpazio di quà, e di là aperto; o convengono in un ſolo punto* F *le rette* EF, GF, *tra le quali pure rieſce lo ſpazio aperto dalla banda oppoſta al loro concorſo; o pure ſe in due punti* H, I *concorrono due linee rette* IH, HI, *riuſciranno adattate in una ſteſſa lunghezza, ſenza comprendere ſpazio veruno, eſſendo l' una ſoprappoſta all' altra, ed eſattamente congruente con quella; che ſe ſi credeſſe andaſſero diſgiunte, come* HI, HLI, *comprendenti qualche ſpazio, una di eſſe dovrà eſſere maggiore dell' altra, e però ſarà curva; come ſarà* HLI, *non potendo eſſere tanto queſta, che quella linea la breviſſima eſtenſione di lunghezza fra i detti termini.* FIG. 7.

II. *Bensì due linee curve* ACB, AFB, *ovve-* FIG. 8.

ro una retta AB *con la curva* ACB, *o ancora una sola curva* ADBC, *che ritorni in se stessa, possono fare una figura, comprendendosi tra esse lo spazio per ogni verso.*

FIG. 9. III. *Perchè adunque non possono due linee rette comprendere una figura, almeno tre rette linee* AB, AC, CB *conviene, che si connettano co' loro termini per fare una figura* ABC, *che dicesi* Triangolo rettilineo.

FIG. 10. IV. *Quanto poi alle superficie piane non possono comprendere qualche figura corporea, nè due, nè tre sole, ma quattro almeno, come accade in una Piramide* EGFD, *compresa da quattro triangoli* DEG, DGF, EGF, EDF; *imperocchè tre* FIG. 11. *soli piani* A, B, C, (*e molto meno due soli* A, B) *non possono comprendere una figura corporea; ma dalle superficie curve si può benissimo, o sia una sola, o due, o tre ancora, comprendere lo spazio, onde risulterebbero le figure de' Corpi.*

FIG. 12. V. *Dall' essere una linea retta la più breve di tutte l' altre terminate a' medesimi punti, come si è detto nella Definizione* V. *è chiaro, che in qualsivoglia triangolo* BAC *qualunque lato* BC *deve essere minore della somma degli altri due* AB, AC *terminati agli stessi punti* B, e C, *tra cui giace la linea* BC; *siccome ancora, se più altre linee* ACB, ADB *convengono ne' due termini* A, B, *esse sono maggiori della retta* AB; *ed essendo amendue concave verso la medesima parte, bisogna che l' esteriore* ACB *sia maggiore dell' interiore* ADB, *accostandosi più questa, che quella alla minima retta linea* AB.

FIG. 13. VI. *Onde ancora è chiaro, che se da' termini*

A, B

A, B *della base* AB *d' un triangolo* ACB, *siano tirate dentro due linee* AD, BD, *convenienti in* D, *saranno le due interne* AD, BD *minori delle due esteriori* AC, BC, *paragonando la somma di quelle alla somma di queste, come si è detto delle curve antecedenti* ADB, ACB.

DEFINIZIONI.

IX. Concorrendo due linee *AB*, *CB* nel punto *B*, non da parti direttamente opposte, che farebbero così una sola retta linea, ma in modo tale, che resti una inclinata all' altra, si diranno fare un *Angolo* nel punto del loro concorso, il quale stimerassi maggiore, o minore, secondo la maggiore, o minore apertura di dette linee, senza riguardo alla lunghezza di esse. FIG. 14.

X. Quando una linea *DB* concorra con la retta *AC* nel punto *B*, in modo tale, che non penda più da una banda, che dall' altra, ma sia ugualmente inclinata ad amendue le parti *BC*, *BA*, sicchè gli angoli *ABD*, *CBD* siano uguali, allora detta linea *BD* si dirà *Perpendicolare* all' altra *AC*. FIG. 15.

XI. E ciascuno di detti angoli *ABD*, *CBD* si dirà *Angolo retto*.

XII. Ma facendo la linea *DB* sopra la *AC* angoli disuguali, da una parte l'angolo *ABD* maggiore, dall' altra *CBD* minore, si dirà essa linea *DB Obliqua* sopra l' altra *AC*. FIG. 16.

XIII. E l' angolo maggiore si dirà *Ottuso*, l' angolo minore *Acuto*.

SCOLIO III.

I. D*Icesi uno degli angoli* ABD *conseguente all'altro* CBD, *essendo fatti ambidue dalla medesima linea* DB *sopra la stessa* AC; *e dicendosi* Retti *tali angoli, quando sono tra di loro uguali, bisogna che riuscendo disuguali, il maggiore del retto sia l'ottuso, ed il minore del retto sia l'acuto, e tutti e' due presi insieme sono uguali alla somma di due retti.*

II. *Non solamente sono uguali tra loro li due conseguenti angoli retti, fatti da una perpendicolare sopra una linea retta, ma ancora qualunque angolo retto è uguale ad un altro fatto sopra un*
FIG. 17. *altra linea; imperocchè, se alla retta* AC, *cui è perpendicolare* DB, *si soprapponga la* EH, *cui è perpendicolare la* LF, *facendo concorrere il punto* F *col punto* B, *si adatterà essa retta* ABC *con* EFH, *e la perpendicolare* BD *con l'altra* FL; *perchè altrimenti, se la* FL *cadesse di quà dalla* BD, *l'angolo* EFL *sarebbe minore di* ABD, *ed* LFH *maggiore di* DBC; *onde essendo uguali* ABD, *e* DBC, *non sarebbero uguali* EFL, LFH, *per essere quello minore del primo, e questo maggiore del secondo, che era uguale al primo. Bisogna dunque, che le perpendicolari* FL, BD *convengano, e però l'angolo retto* ABD *sia uguale all'altro* EFL, *e l'angolo retto* DBC *sia uguale ad* LFH, *e così a ciascun retto.*

III. *E' poi chiaro, che li due angoli ancora di-*
TAV. II. FIG. 18. *suguali fatti da una retta* DB *sopra alla retta* AC, *cioè l'angolo* ABD *ottuso, e* DBC *acuto, presi insieme sono uguali a due retti, perchè se dal me-*

de-

desimo punto B *sarà tirata sopra la medesima retta* AC *la perpendicolare* BE, *le due aperture degli angoli* ABD, *e* DBC *si adatteranno alli due retti* ABE, EBC, *e però gli saranno uguali, combaciandosi con essi* (*per l' assioma quinto*)

IV. *Segandosi due linee rette nel punto* B, *gli angoli alla cima opposti* ABF, CBD *saranno uguali, perchè aggiunto all' uno, e all' altro l' intermedio* ABD, *è chiaro, che li due* ABF, *ed* ABD *sono uguali a due retti, come ancora li due* CBD, ABD (*per quello si è detto al numero* 3. *precedente*); *dunque essendo* ABF *con* ABD *uguali a* CBD *con* ABD, *tolto di comune* ABD, *deve essere* ABF *uguale a* CBD (*per l' assioma* 3.) FIG. 19.

V. *Se più linee* AC, DF, HI *s' intersegano nel medesimo punto* B, *tutti gli angoli, che ne risultano, saranno uguali a quattro retti; ed ancora se non fossero per diritto esse linee l' una con l' altra, ma convenissero in esso punto* B *a fare tutti gli angoli, che riempissero quello spazio, la somma di detti angoli sarebbe uguale a quattro retti; perchè tirata qualunque retta linea* HI *per lo punto* B, *gli angoli, che rimarrebbero da una parte di essa, sarebbero uguali a due retti, e quelli dell' altra parte ad altri due retti, e però tutti a quattro retti debbono essere uguali.* FIG. 20.

VI. *Quindi solamente quelle figure, di cui tutti gli angoli posti insieme uguaglino quattro retti, possono riempire lo spazio, congiungendosi in un punto, senza lasciarvi interstizj voti.*

VII. *Se due linee rette* AB, CB *congiungendosi dall' una, e dall' altra parte colla retta* DB *nello stesso punto* B, *faranno con essa li due angoli* FIG. 21.

goli ABD, CBD *uguali a due retti, ſaranno eſſe linee per diritto fra loro; altrimenti prolungata la retta* CB, *ſe non conveniſſe colla* BA, *ma cadeſſe nel ſito* BE, *ſarebbero gli angoli* EBD, *e* CBD *uguali a due retti, cioè agli ſteſſi due* ABD, *e* CBD; *dunque ſarebbe* ABD *uguale ad* EBD, *cioè la parte al tutto; il che è impoſſibile* (*per l' Aſſioma* 6.)

DEFINIZIONI.

XIV. Intendendo muoverſi la retta *CA* in una
FIG. 22. ſuperficie piana attorno all' eſtremo ſuo punto *C*, che ivi mantengaſi fiſſo, e raggirarſi eſſa linea fino a che ritorni al primiero ſuo ſito, la ſuperficie *ADBE*, che quindi viene generata, ſi chiama *Cerchio*, ovvero *Circolo*.

XV. Ed eſſo punto fiſſo *C* diceſi *Centro* di eſſo Cerchio.

XVI. E la curva deſcritta dall' eſtremo *A* nel ſuo giro, ſi dice *Periferia*, o *Circonferenza*.

XVII. Qualunque retta *AB*, ovvero *DE* ſteſa pel centro *C*, e terminata di quà, e di là alla circonferenza ſi chiama *Diametro* del Cerchio.

XVIII. E qualſivoglia retta tirata dal centro alla circonferenza *CA*, *CD*, *CB*, *CE*, diceſi *Raggio*, ovvero *Semidiametro* di quel circolo.

SCOLIO IV.

I. E' *Manifeſto per le coſe dette di ſopra, che ſiccome il Triangolo è la prima, e più ſemplice figura rettilinea tra le piane figure, così il Circolo è la prima, e più ſemplice Figura curvilinea.*

II. *Si*

II. *Si osservi ancora, che nel Cerchio tutti i raggi, cioè tutte le linee condotte dal centro alla circonferenza sono uguali, imperocchè la retta* CA *generatrice del Cerchio, nel girare intorno si combacerebbe esattamente con qualunque altra linea* CD, CB, CE, *e però tutte sono uguali (per l' assioma* 5.)

III. *Quindi è chiaro, che se due Cerchj* DF, AE *si tocchino, o si seghino in* F, *non potranno avere un centro comune ad ambidue; imperocchè chi supponesse fosse* C *quel centro comune, congiunta al concorso* F *d'ambi i Cerchj la retta* CF, *e dove le periferie vanno distinte, tirata la* CE, *segante l'altro Cerchio in* D, *esser dovrebbe il raggio* CF *tanto uguale a* CE, *che a* CD, *onde (per l' assioma* 1.) *sarebbe* CE *uguale a* CD, *il tutto alla parte; il che è impossibile (per l' assioma* 6.) FIG. 23.

IV. *Serve poi la circonferenza di qualunque Cerchio a misurare la quantità degli angoli rettilinei, la quale non dipende dalla lunghezza maggiore, o minore delle rette linee, che comprendono detto angolo, ma dalla varia loro inclinazione, che rende essi angoli, o retti, o maggiori, o minori del retto; pertanto descritto col centro* C *qualunque circolo* AGBF, *ovvero* HMIN, *e condotto il diametro* AB *nel primo, o il diametro* HI *nel secondo, ed eretta per lo centro perpendicolare ad* AB *l' altra retta* GF, *che sega il minor cerchio in* NM, *tanto saranno angoli retti* ACG, BCG, *che gli altri due* HCN, ICN, *ed ancora gli opposti* ACF, BCF, *ed* HCM, ICM, *tutti tra di loro uguali (Scolio* 3. *num.* 2.) *e però da que' due diametri essen-* FIG. 24.

ſendo diviſa in 4. parti l' una, e l' altra circonferenza (come nel ſeguente numero dimoſtreraſſi) tra di loro uguali, eſſe miſurano li detti angoli retti: cioè diviſa qualunque di dette circonferenze in 360 *parti uguali (che ſi chiamano gradi circolari) la quarta parte di eſſi, che ſaranno gradi* 90., *è la miſura dell' angolo retto; e ſe tiraſi per lo centro qualunque altra linea* DE *inclinata ad* AB, *che farà l' angolo ottuſo* ACE, *e l' acuto* ECB, *ſe nell' arco* AGE *vi ſono* 120. *gradi, e nell' arco* EB 60, *quello ſarà la miſura dell' angolo* ACE, *queſto dell' angolo* ECB, *e l' angolo di mezzo* ECG *ſarà di gradi* 30., *eſſendo tale l' arco* GE. *E così ancora nel Cerchio più piccolo ſarà* HN *di* 90. *gradi, miſura dell' angolo retto* HCN, *ed* HNL *di gradi* 120., *miſura dell' angolo ottuſo* HCL, *ed* LI *di gradi* 60., *ed* NL *di* 30, *che miſurano gli acuti* ICL, LCN; *e così qualunque altro angolo fatto al centro ſi miſura co' gradi dell' arco ſottopoſto di un Cerchio deſcritto con qualunque raggio.*

V. *Che la circonferenza dividaſi in parti uguali da qualunque angolo uguale fatto al centro, e però ſia l' arco intercetto da i lati dell' angolo, la* FIG. 25. *preciſa miſura di eſſo, ſi dimoſtra così. Tirato nel Cerchio il diametro* ACB, *s' intenda muoverſi la porzione* AEB, *rivoltandoſi ſopra l' altra* ADB; *è manifeſto, che ſoprappoſta quella ſopra di queſta, neceſſariamente ſi combaceranno da per tutto; altrimenti, ſe riuſciſſe diſpoſta in un ſito* AFB, *rimanendo in qualche parte l' arco di eſſa diſpoſto dentro, o fuori dell' arco dell' altra* ADB, *tirato dal punto* D *al centro* C *il raggio* DC, *ſegherebbe*

rebbe l' altra porzione in F, *e ſarebbe il raggio* FC *diſuguale al raggio* DC; *il che è aſſurdo, eſſendo tutte le rette condotte dal centro alla circonferenza tra di loro uguali, come ſopra ſi è detto al num.* 2. *Pertanto conviene, che tutti i punti della porzione* AEB, *rivoltata ſopra l' altra* ADB, *convengano co' punti di queſta, e non ſi allontanino, o ſi avvicinino al centro più di eſſi. Dunque ſi adatta l' arco* AEB *all' arco* ADB. *E così ancora tirato qualunque altro diametro* DH, *ſe intorno ad eſſo ſi rivoltaſſe la parte* DAH, *ſopra la parte* DBH, *queſte pure ſi combacerebbero inſieme; onde tutte le porzioni della circonferenza, ſegate dal diametro, ſono tra loro uguali, e ſono la metà dell' intera circonferenza; ed eſſendo l' angolo* ACE *fatto al centro uguale all' angolo* ECH, *ovvero* ACD, *ſoprappoſti l' uno all' altro, eſſi angoli ſi combaceranno, e però gli archi loro, adattandoſi pure l' uno ſopra l' altro, ſono uguali. Dunque la circonferenza circolare deve eſſere veramente la miſura degli angoli, corriſpondendo gli archi uguali agli angoli uguali, e li maggiori a' maggiori, ed i minori a' minori.*

VI. *Quindi è, che diviſa la circonferenza in* 360. *gradi uguali, la miſura dell' angolo retto è* 90. *gradi, che ſono la quarta parte di eſſa, e la metà di eſſo angolo retto, che è un acuto ſemiretto, ha per miſura* 45. *gradi, ed il ſuo conſeguente ottuſo è di gradi* 135. *e così miſuranſi ancora li maggiori, ed i minori; anzi qualunque grado ſi divide in* 60. *minuti primi, e qualunque primo minuto in* 60. *minuti ſecondi, e qualſivoglia ſecon-*

do

do in 60 minuti terzi; e così proſeguendo in infinito, perchè a qualche angolo acuto, ovvero ottuſo può corriſpondere un arco circolare, non compoſto di preciſi gradi interi, ma di alcuni ſoli, e di qualche parte di un altro, la qual parte dovrà importare alcuni minuti primi, ed altri ſecondi, o terzi, o quarti &c. e tale ſarà la miſura di eſſo angolo, e quelli angoli ſaranno uguali, che averanno ſotto di ſe gli archi della ſteſſa miſura di gradi; o minuti; ed uno ſarà maggiore dell' altro, ſecondochè corriſponderà ad un arco di più gradi, o minuti.

AVVERTIMENTO.

L*E ſeguenti Propoſizioni ſi chiamano, o* Problemi, *ne' quali ſi cerca il modo di fare qualche figura, qualche angolo, o tirarvi qualche linea; o ſi dicono* Teoremi, *in cui ſi dimoſtra qualche proprietà delle figure, e degli angoli, o delle linee, di cui ſi parla; onde alla prima Propoſizione ſi aggiungerà, eſſere* Problema, *ed alla ſeconda, che ſia* Teorema, *non aggiungendo però tali titoli alle altre Propoſizioni, perchè facilmente ſi riconoſceranno nel loro titolo, ſe ſiano Problematiche, o Teorematiche; e da eſſe ancora ſi daranno altre definizioni, non ancora quì ſopra propoſte.*

Non aggiungo ne meno quì i Poſtulati *propoſti da Euclide; baſtando che da qualunque Scrittore ſi poſſa da un punto all' altro tirarvi una linea retta: ed ancora qualunque linea prolungarla direttamente quanto ſarà di biſogno; e da qualſivoglia punto preſo per centro, con qualunque intervallo dato, come raggio, o ſemidiametro, deſcriverci un Circolo.* PRO-

PROPOSIZIONE I. PROBLEMA.

Date tre linee rette FA, AB, BE, *delle quali due qualunque prese insieme siano maggiori della terza, formarne il triangolo* ACB.

DAl termine *A* della retta *AB* preso come centro, e con l' intervallo dell' altra retta *AF*, descrivasi il circolo *FCG*; e preso pure l' altro termine *B* per centro, con l' intervallo della *BE*, descrivasi un altro circolo *ECD*: e dove questi Cerchj con le loro circonferenze si segano in *C* (essendo li due raggi di essi maggiori di *AB*, e la stessa *AB* con *BE*, maggiore di *AF*, cioè di *AG* uguale ad *AF*, siccome ancora *AB* con *AF* è maggiore di *BD* uguale a *BE*) si congiungano a' termini dell' altra retta *AB* le rette *CA*, *CB*; sarà fatto *ACB* il triangolo ricercato, essendo il lato *AC* uguale ad *AF* ed il lato *BC* uguale a *BE* [a], e l' altro lato *AB* il medesimo proposto. Dunque è fatto il triangolo compreso dalle tre date linee, come far si dovea. FIG. 26.

(a) *Scol.* 4. *num.* 2.

COROLLARJ.

I. Se le tre linee proposte fossero tra loro uguali, qualunque circolo passerebbe pel centro dell' altro, essendo tanto *AF* uguale ad *AB*, quanto *BE* uguale alla stessa; onde un tale triangolo *ABC*, composto di tre lati uguali, dirassi *Triangolo Equilatero*. FIG. 27.

II. E se fossero due sole linee *AF*, *BE* tra di loro uguali, risultandone il triangolo *ACB*, co' FIG 28.

co' due lati uguali *AC*, *BC*, diraffi *Triangolo Isoſcele*, ovvero *Equicrure*.

III. Ma ſe tutte le linee date ſono diſuguali, come nella figura 26., eſſo triangolo *ACB*, in cui *AC* è maggiore di *CB*, e queſta pure maggiore di *AB*, ſi dice *Triangolo Scaleno*.

PROPOSIZIONE II. TEOREMA.

Ne' triangoli BAC, EDF, *ſe intorno agli angoli uguali* A, *e* D *ſaranno i lati dell' uno uguali a quelli dell' altro, cioè AB uguale a* DE, *ed* AC *uguale a* DF; *ſaranno ancora uguali le loro baſi* BC, *ed* EF; *e gli angoli interni, oppoſti a' lati uguali, ſaranno pure tra di loro uguali; e prolungati i lati ſotto alle baſi, ne riuſciranno pure gli angoli eſterni uguali* CBG *ad* FEI, *e* BCH *ad* EFK; *E tutto un triangolo ſarà uguale all' altro.*

FIG. 29. INtendaſi ſoprappoſto un triangolo all' altro: ſi adatterà l' angolo *BAC* all' angolo uguale *EDF*, ed i lati uguali converranno inſieme, *AB* con *DE*, ed *AC* con *DF*; dunque ancora la baſe *BC* ſarà congruente alla baſe *EF*; onde queſte pure ſaranno uguali, adattandoſi l' una ſopra all' altra (a); ed ancora gli angoli interni, e gli eſterni converranno tra loro, e tutto il primo triangolo ſarà adattato, e congruente al ſecondo; però ſaranno uguali tutti gli angoli corriſpondenti, e tutti e' due i triangoli *ABC*, *DEF* ſi moſtreranno uguali. Il che dovea dimoſtrarſi.

(a) *Scol. 2. num. 1.*

COROLLARJ.

FIG. 30. I. Eſſendovi una linea retta *AC*, diviſa pel mezzo

mezzo in *B*, dal qual punto ſia la perpendicolare *BE*, di ſopra, o di ſotto ad eſſa retta *AC*, ſarà qualſivoglia punto *E*, ovvero *D* in eſſa perpendicolare ugualmente diſtante da' termini *A*, e *C*; imperocchè, congiunte le rette *AE*, *CE*, ovvero le altre *AD*, *CD*, eſſendo nel triangolo *ABE*, e nell' altro *CBE* gli angoli di quà, e di là dal punto *B* uguali, perchè retti (a), ed il lato *BA* uguale al lato *BC*, ed il lato *BE* comune ad eſſi, dovrà eſſere la baſe *AE* uguale alla baſe *CE*; e ſimilmente ne' triangoli *ABD*, *CBD* eſſendo i lati *AB*, *BC* uguali, ed il lato *BD* comune, intorno agli ſteſſi uguali angoli retti *ABD*, *CBD*, ſaranno pure le baſi *AD*, *CD* uguali; dunque qualſivoglia punto *E*, ovvero *D*, preſo nella ſteſſa perpendicolare *EB*, è diſtante ugualmente da' termini *A*, *C* della retta *AC*, diviſa in mezzo da quella perpendicolare.

(a) Defin. 10.

II. Similmente ſono tra loro uguali gli angoli fatti da eſſe rette *EA*, *EC* ſopra la baſe *AC*; o ancora con eſſa perpendicolare *EB*; cioè *EAB* è uguale ad *ECB*, e l' altro *AEB* è uguale a *CEB*: e così ancora ſono uguali gli angoli *DAB*, *DCB*, e gli altri *ADB*, *CDB*, tra loro.

III. Può ancora dimoſtrarſi, che ciaſcun punto ugualmente diſtante da eſſi termini *A*, *C*, deve eſſere neceſſariamente ſituato nella perpendicolare *BE*, che ſega in mezzo eſſa retta *AC*, nè può eſſere fuori di eſsa; perchè ſe ſi ſupponeſse, che il punto *F* fuori di tale perpendicolo foſse ugualmente diſtante da *A*, e da *C*, congiunte le rette *AF*, *CF*, ſarà da alcuna di queſte ſegata la perpendicolare in *D*, e congiunta dall' altro FIG. 31.

termine la AD farà uguale a CD; dunque le due FD, AD, faranno uguali ad FC (a); ma quelle due FD, AD, sono maggiori di AF (b), dunque ancora FC è maggiore di AF, onde non è il punto F in distanza uguale da A, e C.

(a) Assioma 3.
(b) Scol. 2. num. 5. e 6.

IV. Dunque ciascun triangolo equicrure AEC, ovvero ADC, averà sempre il vertice E, o pure D nella stessa perpendicolare BE, condotta dal punto di mezzo della base, e non mai averà il vertice fuori di essa; onde essendo sempre uguali gli angoli EAB, ECB, ovvero gli altri due DAB, DCB, sempre dunque il triangolo equicrure ha gli angoli uguali sopra alla base.

V. Anzi essendo in un triangolo due angoli uguali, bisogna che ancora i suoi lati opposti siano uguali, e se un angolo è maggiore dell' altro, il lato opposto al primo sarà maggiore, che l' opposto al secondo; siccome essendosi mostrata CF maggiore di AF, l'angolo pure CAF è maggiore di BAD, e però maggiore di ACF uguale a questo; e comunque sia tirata la AF, che faccia l'angolo FAC maggiore di ACF, la retta CF deve passare oltre la perpendicolare BE, e però diventare maggiore CF della AF, come si è dimostrato nel Corollario 3.

VI. La minima delle rette, condotte dal punto A sopra alla retta BE, sarà la perpendicolare AB, e dell'altre oblique AD, AE, la più vicina alla perpendicolare è minore della più lontana; perchè prolungata AB in BC uguale ad essa, e congiunte le CD, CE; essendo la somma delle esteriori AE, EC maggiore della somma delle interne AD, DC, e queste pure maggiori

FIG. 32.

di

di *AC* (a), ancora la metà di esse (essendo *AE* uguale ad *EC*, e *AD* uguale a *DC* per il Coroll. 1.) cioè *AE*, sarà maggiore di *AD*, e questa pure maggiore di *AB* (b), onde questa è la minima di tutte le altre.

(a) Scol. 1. nu. 5. e 6.

(b) Assio. 7.

PROPOSIZIONE III.

TAV. III. FIG. 33.

Vicendevolmente, se ciascun lato d' un triangolo ABC *è uguale al corrispondente lato dell' altro* DEF, *cioè* BC, *ad* EF, BA *ad* ED, *ed* AC *a* DF, *ancora gli angoli opposti a' lati uguali saranno uguali.*

FIG. 34.

SI sopraponga il lato *BC* del primo al lato uguale *EF* del secondo, e verso la medesima parte soprapposti essi triangoli, si adatteranno totalmente, ciaschedun lato soprapponendosi all' altro uguale, onde tutti gli angoli si combagieranno, e saranno però uguali ancora essi (c); altrimenti, se i lati *AB*, *AC* non si adattassero alli uguali *DE*, *DF*, ma gli si ritirassero sopra, o sotto, come nella seconda figura, sarebbero li due lati di sopra *BA*, *CA* maggiori de' due lati di sotto *ED*, *FD* (a), contro il supposto; e se i lati s' intersecassero *AB*, *FD* in *G*, come nella figura terza, essendo *BG* con *GD* maggiore di *BD*, ed ancora *CG* con *GA* maggiore di *CA*, sarebbe pure *AB* con *DF* maggiore di *ED* con *CA*; il che è contro l' ipotesi; essendo la somma delle due prime uguale alla somma delle seconde (d). Dunque veramente si adattano essi lati uguali, onde ancora gli angoli corrispondenti sono uguali. Il che &c.

FIG. 35.

(c) Ass. 5.

(d) Ass. 3.

COROLLARJ.

I. Si raccoglie da quest' ultimo caso, che se due rette linee *BA*, *FD* si segano in *G*, sono esse maggiori delle rette *DB*, *AF* sottotese agli angoli opposti *BGD*, *AGF*; ed ancora può dedursi, che dagli stessi termini della base *BC* non possono condursi le rette uguali a' lati *BA*. *CA* verso la medesima parte, che insieme convengano in un altro punto *D*, e non nel medesimo punto *A*.

FIG. 36. II. Quindi ancora può dedursi il modo di segare in due angoli uguali un angolo dato *AEF*; perchè tagliata dalla *EF* la parte *EC* uguale all' altra *EA*, e congiunta la *AC*, facendosi sopra di essa dalla parte opposta al dato angolo il triangolo equilatero, o equicrure *ADC*, congiunta la retta *ED* segherà per mezzo esso angolo *AEF*, perchè tutti i lati del triangolo *EAD* uguagliano quelli dell' altro *ECD*, cioè *EA* uguale ad *EC*, ed *ED* lato comune ad ambidue i triangoli, e la base *AD* uguale alla base *CD*; dunque è diviso l' angolo *AEF* negli angoli *AED*, *CED* tra loro uguali.

III. Ancora volendo segare pel mezzo una linea *AC*, fatto sopra alla medesima un triangolo equilatero, o equicrure *AEC*, e diviso pel mezzo l' angolo *AEC* colla retta *EB*, segherassi pel mezzo in *B* la base *AC*, avendo li triangoli *AEB*, *CEB* intorno l' angolo uguale in ambidue verso *E*, il lato *AE* uguale al lato *EC*, ed il lato *EB* comune, bisogna che ancora le basi *AB*, e *BC* siano uguali (*a*).

(*a*) Prop. 2.

IV.

IV. Circa il tirare una linea *EB* perpendicolare ad un altra *AC*, o nel punto *B* assegnato in essa, o dal punto *E* superiore alla medesima: nel primo caso, prese di quà, e di là dal punto *B* due linee uguali *BA*, *BC*, e sopra alla retta *AC* fatto un triangolo equilatero, o equicrure *AEC*, congiunta la *EB* sarà perpendicolare alla base, essendo gli angoli *ABE*, *CBE* uguali per essere ancora uguali i lati opposti *AE*, *EC* ne' triangoli *AEB*, *CEB*, con i lati uguali *AB*, *CB*, e l' altro *EB* comune ad ambidue. Ma nel secondo caso, inclinata qualunque linea *EC* dal dato punto *E* sopra la retta *AC*, e col centro *E*, intervallo *EC* descritto il cerchio *CGA*, la circonferenza del quale segherà la retta *AC* in un altro punto *A*, e divisa questa *AC* pel mezzo in *B*, congiunta *EB* sarà la perpendicolare, perchè tirate le rette *EA*, *EC*, li triangoli *EBA*, *EBC* avendo tutti i lati corrispondenti uguali, devono ancora gli angoli *EBA*, *EBC* essere uguali, e però retti. FIG. 37.

V. Volendo dati due punti *A*, *C* ritrovare un punto *E*, da essi ugualmente distante in una data linea retta, o curva *GF*, congiunta la retta *AC*, e divisa pel mezzo in *B*, gli si alzi la perpendicolare *BE*, che concorra con la linea *GF* nel punto *E*, è manifesto, che congiunte le rette *AE*, *CE* saranno uguali [a], e però li dati punti *A*, *C* saranno dal punto *E* della proposta linea *GF* ugualmente distanti; e se la detta perpendicolare non convenisse con *GF*, non vi sarebbe in essa verun punto ugualmente da essi termini *A*, *C* distante [b]. FIG. 38.

(a) Prop. 2 Coroll. 1.

(b) Prop. 2. Coroll. 3.

FIG. 39. VI. Tirata nel cerchio qualunque corda *AB*, e dal suo punto di mezzo *F* condotta la perpendicolare *FM*, in essa dovrà essere il centro del cerchio, che da' termini *A*, *B* deve essere ugualmente lontano, essendo uguali tutti i raggi del cerchio [a], non potendo però esso centro essere fuori di tale perpendicolare [b]; e tirata qualunque altra corda *DE*, e dal suo punto di mezzo *G* erettavi la perpendicolare *GL*, concorrente con la *FM* in *C*, dovrà questo punto essere il centro del cerchio, dovendo essere tanto in quella, che in questa perpendicolare: però in questa maniera si trova il centro del cerchio, o di qualunque arco dato.

(a) Scol. 4. num. 2.

(b) Prop 2. Coroll. 3

PROPOSIZIONE IV.

FIG. 40.

Ne' triangoli BAC, EDF *essendo uguale il lato* AB *al lato* DE, *ed il lato* AC *al lato* DF, *se l'angolo* A *è minore dell' angolo* D, *sarà la base* BC *parimente minore della* EF.

IMperocchè soprapposto quel triangolo a questo, ed adattatosi il lato *AB* al suo uguale *DE*, l'altro lato *AC* caderà al di dentro, di quà dal suo uguale lato *DF*, essendo l' angolo *BAC* minore di *EDF*; onde il termine *C*, o caderà nella base *EF*, o sopra, o sotto di esso, secondo che l'angolo *ABC* fosse uguale, o minore, o maggiore dell' angolo *DEF*; però sarà sempre *BC* minore di *EF*, adattandosi nel primo caso quella ad una parte di questa; e nel secondo caso le due *AC*, *BC* essendo minori delle altre due *DF*, *EF* [c], siccome *AC* è uguale a *DF*, l'altra *BC* deve

(c) Scol. 2. num. 6.

ve essere minore della EF; e nel caso terzo, essendo le due AC, EF maggiori delle due BC, DF [a], ma la DF uguale ad AC, bisogna che sia EF maggiore della BC. Il che doveasi dimostrare.

(a) Prop. 3. Coroll. 1.

COROLLARJ.

I. Ancora viceversa, se si sapesse, che in due triangoli fossero due lati del primo uguali a quelli del secondo, ma la base di quello minore della base di questo, sarà pure l' angolo verticale del primo minore di quello del secondo: perchè se tali angoli fossero uguali, ancora le basi loro sarebbero uguali [b], e se l' angolo del primo fosse maggiore di quello del secondo, ancora la base di quello sarebbe maggiore della base di questo, contro l' ipotesi.

(b) Prop. 2.

II. Se in qualunque triangolo EFD fosse un angolo EDF maggiore di un altro DEF, il lato EF, opposto all' angolo maggiore, deve pure essere maggiore del lato DF opposto all' angolo minore; imperocchè supposto dentro l' angolo maggiore EDF, l' angolo EDH uguale al minore DEF, sarà la retta DH uguale ad EH [c], e però le due DH, ed HF sono uguali alla EF; ma quelle due sono maggiori della DF, dunque ancora la EF è maggiore di essa DF. FIG. 41.

(c) Prop. 2. Coroll. 5.

PROPOSIZIONE V.

Delle rette condotte alla circonferenza di un cerchio da un punto D, *distante dal centro* C, *la* DB, *che passa pel centro, è la massima di tutte, la* D A, *per cui non passa il centro, ma è in diretto alla* DB, *sarà la minima, e dell' altre* DE, DF, FIG. 42.

DI, DH, *la più vicina alla massima è maggiore della più lontana, e la più vicina alla minima è minore della più rimota da essa.*

IMperocchè congiunti i raggi, essendo *CB* uguale a *CE*, aggiuntavi la *CD*, saranno le due *CE*, *CD* uguali alla intera *DB*; ma quelle due sono maggiori della terza *DE*, dunque *DB* è maggiore della *DE*. Poscia essendo l' angolo *ECD* maggiore dell' angolo *FCD*, ne' triangoli *DCE*, *DCF*, che hanno il lato *CE* uguale al raggio *CF*, ed il lato *CD* comune, e però uguale in ambidue i triangoli, la base *DE* sarà maggiore della *DF* [a], dunque la più prossima *DE* alla massima *DB* e maggiore della *DF* più lontana dalla stessa. Similmente ne' triangoli *CID*, *CHD*, che hanno i lati uguali *CI*, e *CH*, ed il comune *CD*, e l' angolo *DCI* è minore dell' angolo *HCD*; la base *DI* è minore della *DH*, ed ancora la *DA* è minore della stessa *DI*, perchè *CD* con *DI* è maggiore di *CI*, e però è maggiore della *CA* uguale a *CI*; dunque tolto di comune *CD*, ancora la *DI* sarà maggiore della *DA*, la quale però è la minima di tutte, e le più prossime ad essa riescono minori delle più lontane. Il che dovea dimostrarsi.

(a) Prop 4.

COROLLARJ.

I. Due linee però solamente possono essere uguali, una condotta da una parte, e l' altra dall' altra parte del diametro, come sarà *DF* uguale a *DG*, e *DH* uguale a *DK*, quando seghino di quà, e di là dal diametro due archi uguali, come

me AF è uguale ad AG, ed AH uguale ad AK, onde l' angolo DCF uguaglia l' angolo DCG, e l' angolo DCH è uguale all' altro DCK, onde avendo per lati uguali i raggi, ed il lato DC comune, le loro basi riescono uguali.

II. Onde, se da un punto si trovassero condotte alla circonferenza più di due linee uguali, esso punto sarebbe il centro di esso cerchio, mentre dal punto, che non è centro, non se gli possono condurre più di due linee uguali.

III. Quindi due cerchj AFE, DBE non possono segarsi, se non in due punti, come A, e B; che se convenissero ancora in altri punti, per esempio in E, dal centro C di uno di essi condotte le rette CA, CB, CE, tra di loro uguali, dovrebbe lo stesso punto C essere centro ancora dell' altro cerchio; il che è impossibile (a); dunque &c. FIG. 43.

(a) Scol. 4. num. 3.

PROPOSIZIONE VI.

Se dal termine B del raggio CB gli si tira sopra la perpendicolare ABE, *non potrà concorrere con altro punto del cerchio; onde questa si chiamerà la sua* Tangente.

FIG. 44.

IMperocchè tirata dal centro C a qualunque altro punto E di essa perpendicolare la retta CE, sarà questa maggiore della CB (b); dunque è maggiore del raggio CH; e però qualsivoglia altro punto della retta ABE essendo dal centro più lontano di qualunque raggio, non concorre essa linea con la circonferenza, se non nell' unico punto B, ove la tocca; e però questa linea perpendicolare al raggio nel termine di esso, dicesi tangente del circolo. Il che &c.

(b) Prop. 2. Coroll. 6.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente se una retta *AB* tocca il cerchio, congiunta la retta *CB* dal centro al contatto, gli sarà perpendicolare; altrimenti supponendo, che la sua perpendicolare condotta dal centro *C*, fosse un altra *CE*, sarebbe essa minore di *CB*, cioè del raggio *CH*, e riuscirebbe il tutto minore della parte; il che è impossibile.

FIG. 45. II. Qualunque altra retta linea *BF* condotta dallo stesso punto *B* segherà il cerchio, perchè dal centro tiratavi la perpendicolare *CG*, essendo questa minore del raggio *CB*, è pure minore del raggio *CI*; dunque si distende *BF* sotto l' arco circolare *BIN*, e però sega il cerchio.

III. Dunque l' angolo *ABI*, che dicesi *Mistilineo*, contenuto dalla retta *BA*, e dalla curva *BI*, è minore di qualsivoglia angolo acuto rettilineo *ABF*; e l' angolo pure Mistilineo *DBI*, contenuto dal diametro *DB*, e dalla circonferenza *BIND*, è maggiore di qualunque angolo acuto *DBF*, perchè facendo la *BF* con la tangente qualunque minimo angolo acuto, e col diametro qualsivoglia angolo acuto molto grande, cade dentro il cerchio, onde l' angolo mistilineo *ABI* è sempre minore di qualunque acuto *ABF*; e l' angolo *DBI* è sempre maggiore dell' altro acuto *DBF*.

IV. Quindi se la retta *BD* girasse intorno al punto *B*, passerebbe da un estremo all' altro, senza passare pel mezzo; cioè farà col diametro un angolo acuto, che sempre diventerà maggiore, secondo che più si allontana da esso, continuando

do il ſuo giro; e ſempre tale angolo acuto ſarà minore del miſtilineo *CBI*; poi arrivando eſſa linea moſſa ſopra la tangente *BA*, farà col diametro l' angolo *CBA* retto maggiore di eſſo *CBI*, nè mai in ſito veruno gli averà fatto un angolo uguale.

V. Se al cerchio ſaranno condotte due tangenti *BA*, *HA*, concorrenti inſieme in *A*; o ſe dal detto punto *A* ſiano tirate eſſe tangenti *AB*, *AH*, ſaranno tra di loro uguali; perchè condotti dal centro *C* i raggi *CB*, *CH* a' punti del contatto, faranno angoli retti; e congiunta la *BH*, eſſendo il triangolo *BCH* equicrure, gli angoli *CBH*, *CHB*, ſaranno uguali [a]; cavati dunque queſti dagli uguali angoli retti *CBA*, *CHA*, li rimanenti *ABH*, *AHB* ſaranno pure uguali [b]; dunque le rette *AH*, *AB* tangenti ſono pure uguali tra loro [c]. FIG. 46.

(a) Prop. 2. Coroll. 4.

(b) Aſſ. 3.

(c) Prop. 2 Coroll. 5

VI. Congiunta poi al centro *C* dal concorſo delle tangenti *A* la retta *CA*, dividerà pel mezzo gli angoli *BCH*, e *BAH*, e ſarà perpendicolare alla corda *BH*, facendovi gli angoli retti in *D*, ove pure ſarà eſſa *BH* diviſa pel mezzo; imperocchè li triangoli *ABC*, *AHC* avendo i lati corriſpondenti l' uno all' altro uguali, devono ancora gli angoli loro oppoſti eſſere uguali, cioè *BCA*, ed *HCA*; e *CAH* con *CAB* [d]. Onde ancora ne' triangoli *BCD*, *HCD* eſſendo il lato *BC* uguale a *CH*, e la *CD* lato comune, intorno gli angoli uguali *BCD*, *HCD*, la baſe *BD* ſarà uguale alla baſe *DH*, ed ancora gli angoli corriſpondenti uguali; cioè *CDB* uguale a *CDH*, e però ambidue retti [e].

(d) Prop. 3.

(e) Prop. 2.

PRO-

PROPOSIZIONE VII.

FIG. 47. *Se due cerchj* GFE, BFD *si toccano in* F *al di dentro, o al di fuori, la retta, che congiunge il centro* C *del primo col centro* A *del secondo, passerà per il loro contatto* F.

Altrimenti, supponendo, che il centro *A* del cerchio *BFD* non fosse nella retta *CF*, che connette il centro *C* dell'altro cerchio *GFE*, col comune loro contatto *F*, ma che fosse nel punto *a* fuori di essa *CF*, onde la retta *Ca*, congiungente i centri, segasse il cerchio maggiore in *E*, ed il minore in *D*, ne seguirebbe, che essendo nel cerchio *GEF* dal punto *a* tirata pel centro (a) Prop. 5. *C* la *a C*, sarebbe la rimanente *a E* la minima (a), è pero minore della *a F*; ma supponendosi *a* il centro del cerchio *BFD*, sarà pure *a D* uguale ad *a F*; dunque *a E* sarebbe minore della *a D*, il tutto della parte; il che è impossibile; dunque esso centro del cerchio *BFD* non è fuori della *CF* in *a*, ma nel punto *A*, dentro la stessa retta; però la linea, che connette i centri de' circoli, che si toccano, passa per il loro contatto. Il che &c.

COROLLARJ.

I. E' chiaro, che ancora i cerchj si toccano in un solo punto; altrimenti, condotte dal centro *A* del cerchio *BFD* più linee a' punti, con cui si connettesse il contatto con l' altro cerchio *GFE*, sarebbero tali linee tutte uguali ad *AF*, la quale è la minima, tirata da *F* alla circonfe-

renza

renza *GFE* [a], onde non può averne altre uguali, tirate dal medesimo punto sopra a quell' arco. (a) Prop. 5.

II. Ne segue ancora da ciò, che due cerchj, i di cui centri sono *C*, ed *A*, descritti per un punto *F* della stessa linea *CA*, ivi si toccheranno; perchè essendo *AF* la minima, condotta da *A* al cerchio del centro *C*, essa è minore di *AE*, FIG. 48. dunque ancora il raggio *AD* è minore della retta *AE*, e però le circonferenze di tali cerchj non sono insieme congiunte, se non nel punto *F*, per cui passano i raggi *CF*, ed *AF* descrivendo i cerchi *FEG*, *FDB*, che in esso *F* conseguentemente si toccano.

PROPOSIZIONE VIII.

Se le due rette BE, CF *sopra l' altra retta* BC TAV. IV. FIG. 49. *hanno due angoli interiori* ABC, *ed* ACB *uguali a due retti, esse linee prolungate verso qualunque parte, non potranno convenire insieme, e però si diranno* Parallele.

SE potessero convenire, si congiungano in *A*, e prolungata la *AC* in *CD* uguale alla *BA*, si congiunga *BD*, sarà il triangolo *BCD* uguale all' altro *BCA*, perchè essendo gli due angoli *ABC*, e *BCA* uguali a due retti, ed ancora a due retti essendo uguali *DCB*, e *BCA*, dunque l' angolo *ABC* è uguale a *DCB*, ed il lato *AB* uguale a *CD*, ed il lato *BC* comune, dunque ancora la base *AC* sarà uguale a *BD*; sicchè *BD*, e *BA* essendo uguali ad *AC*, e *CD*, cioè alla retta *AD*, sarebbero due lati del triangolo *ABD* uguali alla base; il che è impossibile; dunque

non

non può effere, che le linee rette *BE*, *CF*, avendo gli angoli, fatti fopra alla retta *BC*, uguali a due retti, convengano infieme in *A*; ma non convenendo da veruna parte infieme (perchè ancora dalla banda oppofta farebbero con la *BC* gli angoli uguali a due retti) fi diranno linee *Parallele*. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Dunque in ogni triangolo i due angoli interni verfo qualunque fuo lato, fono minori di due retti; onde prolungando qualfivoglia lato *BC* in *L*, l' angolo efterno *ACL* farà maggiore di qualunque delli due interni oppofti *ABC*, o *BAC*, perchè ciafcheduno di quefti con l' altro *ACB* è minore di due retti, ma il detto efterno *ACL*, col medefimo *ACB*, uguaglia i due retti.

FIG. 50. II Se in due rette linee *AB*, *GE*, fegate dalla retta *FCD* riufciranno uguali gli alterni *ACD*, *CDE*, o pure l'efterno *FCB*, con l'interno oppofto *CDE* faranno effe linee *AB*, *GE* parallele; perchè ficcome l' angolo *BCD* con l' altro *ACD*, ed ancora con l'efterno confeguente *FCB*, forma due angoli uguali a due retti così effendo *CDE* uguale all' alterno *ACD*, ed all' efterno *FCB*, faranno li due angoli interni *BCD*, *CDE* uguali a due retti, e però le linee *AB*, *GE* non poffono infieme convenire, onde fono parallele.

III. Viceverfa, fe le linee *AB*, *GE* fi fuppongono parallele, qualunque retta *FCD*, che le feghi, farà gli angoli alterni uguali, e l' efteriore uguale all' interno oppofto, e gli due interni *BCD*, *EDC*

EDC uguali a due retti, perchè se ivi, o dall' altra parte li conseguenti fossero minori di due retti, prolungate esse linee converrebbero insieme, facendo un triangolo colla base *DC*; e però devono essere ancora gli angoli alterni *EDC*, *ACD* uguali, e l' esterno *BCF* uguale all' interno opposto *EDC*.

IV. Se due linee *HL*, *AB* sono parallele ad una terza *EG*, saranno ancora tra di loro parallele, perchè tirata la segante *FICD*, essendo *HL* parallela ad *EG*, sarà l' angolo esterno *HIF* uguale all' interno opposto *EDC*: Similmente essendo *AB* parallela alla stessa *EG*, ancora l' angolo esteriore *ICB* sarà uguale allo stesso *EDC*; dunque ancora *HIF* sarà uguale al medesimo *BCI*, dunque le rette *AB*, *HL* sono parallele. FIG. 51.

V. E' facilissimo il tirare da un dato punto *C* una parallela alla retta *EG*, perchè tirata sopra di questa qualunque retta *CD*, e fatto dalla parte alterna l' angolo *DCA* uguale a *CDE*, riuscirà *CA* parallela ad *EG*.

PROPOSIZIONE IX.

In qualunque triangolo ABC *prolungato il lato* AC *in* D, *sarà l' angolo esterno* BCD *uguale alla somma delli due interni opposti* CAB, *ed* ABC; *e tutti tre gli angoli interni sono uguali a due retti*. FIG. 52.

SI tiri dal punto *C* la retta *CE* parallela al lato *AB*, sarà l' angolo *BCE* uguale all' alterno *ABC*, e l' esteriore *ECD* uguale all' interno opposto *CAB* (a), dunque l' angolo esterno *BCD*, uguale

(a) *Prop.* 8. *Coroll.* 3.

uguale a que' due *BCE*, *ECD*, sarà pure uguale alli due interni opposti *ABC*, e *CAB*; onde aggiuntovi di comune l' altro angolo interno *ACB*, saranno li tre angoli interiori uguali alli due *ACB*, e *BCD*, e però uguali a due retti. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Tutti li tre angoli d' un triangolo saranno uguali a tutti li tre angoli di qualunque altro triangolo, essendo tanto questi, che quelli a due retti uguali.

II. Anzi se due angoli d' un triangolo sono uguali a due angoli d' un' altro, ancora il terzo angolo di quello sarà uguale al terzo di questo.

III. E ne' triangoli, che hanno un angolo retto, gli altri due angoli sono pure ad un retto uguali.

IV. In qualunque triangolo equicrure *ABC* es-
FIG. 53. sendo gli angoli sopra la base uguali, prolungato uno de' lati uguali *BC* in *D* sarà l' angolo esterno *ACD* duplo di qualunque degli angoli interni opposti *CBA*, o *CAB*, essendo uguale alla somma di ambidue tra loro uguali.

V. Onde nel cerchio l' angolo fatto al centro è sempre doppio di quello fatto alla circonferenza, da' medesimi punti dell' arco tirati i lati loro, cioè l' angolo *DCA* è duplo dell' angolo *DBA*; e parimente condotto un altro raggio *CE*, e congiunta la retta *EB*, sarà l' angolo *DCE* duplo dell' altro *DBE*; onde ancora il rimanente *ECA* sarà duplo del residuo *EBA*.

FIG. 54. VI. Quindi nel semicircolo, tirate due linee da' ter-

ermini del diametro a qualunque punto della circonferenza, si farà ivi l'angolo retto; perchè essendo l'angolo *DCA* duplo di *ABC*, e l'altro *DCE* duplo di *EBC*, e gli due angoli *DCA*, e *DCE*, che sono uguali a due retti, essendo il doppio dell' angolo *ABE* descritto nel semicircolo, conviene che questo sia veramente un angolo retto.

VII. In qualunque figura rettilinea *ABDEF* FIG. 55. tutti gli angoli interni sono uguali a tal numero di retti, qual'è il doppio numero de' lati, levatine quattro; imperocchè, preso nella figura qualunque punto *C*, ed indi condotte a ciascun angolo le rette *CA*, *CB*, *CD*, *CE*, *CF*, ne risultano tanti triangoli, quanti sono i lati di tale figura; dunque gli angoli di essi triangoli sono uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati della figura; agli angoli della quale essendo congruenti quelli di tali triangoli, eccettuati quelli, che sono intorno al loro vertice *C*, li quali uguagliano quattro angoli retti, dunque il numero de' retti, attenenti ad essa figura, è doppio del numero de' suoi lati, detrattine quattro.

VIII. Gli angoli poi esterni, che risultano, prolungato qualunque lato, cioè *GAF*, *HFE*, *IED*, *KDB*, *LBA*, in qualunque figura saranno sempre uguali a quattro retti; perchè questi con gli angoli interni fanno tante paia di retti, quanti sono i lati; dunque essendo li soli interni uguali a tante paia di retti, quanti sono essi lati, detrattone quattro, bisogna, che a questo numero di quattro retti corrispondano gli angoli esterni; onde gli esterni di

una figura uguagliano quelli di qualunque altra, che sia composta di più, o di meno lati.

PROPOSIZIONE X.

FIG. 56. *Essendo uguali le parallele* AB, DC, *tirate le rette* AC, BD, *che ne congiungono i termini dalla stessa parte, saranno esse ancora uguali, e parallele; e dirassi questa figura un* Parallelogrammo.

IMperocchè congiunti gli angoli opposti con la retta *AD*, ne' triangoli *ABD*, *ACD* essendo gli angoli alterni *BAD*, *ADC* uguali, ed il lato *AB* uguale a *DC*, e l' altro *AD* comune ad ambidue, sarà la base *BD* uguale alla base *AC*, e l' angolo *BDA* uguale all' alterno *CAD*; dunque ancora esse linee *BD*, *AC* sono uguali, e parallele. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente in qualunque parallelogrammo, che ha le linee opposte parallele *AB* a *DC*, ed *AC* a *BD*, esse linee opposte saranno uguali, perchè essendo uguali gli angoli alterni *BAD*, *ADC*, e gli altri due alterni *BDA*, *DAC*, e la retta *AD* comune a' triangoli *ABD*, *ACD*; se si soprapponesse l' uno all' altro, rivoltando esso triangolo *ADC*, coll' angolo *CDA*, dalla banda *A*, e l' angolo *CAD* dalla banda *D*, adattandosi gli angoli uguali sopra l' uguale base *DA*, e *AD*, ancora i lati *DC*, *AB* si concorderanno insieme, e gli altri lati ancora *AC*, *DB* converranno insieme; dunque sono le opposte linee uguali nel parallelogrammo. II.

II. Ancora gli angoli oppofti *B*, e *C* faranno uguali; ficcome pure fi uguagliano gli oppofti *BAC*, *CDB*.

III. La retta *AD* parimente divide pel mezzo il parallelogrammo in due triangoli uguali *ABD*, *DCA*; ed effa linea congiungente gli angoli oppofti dicefi pure il diametro del parallelogrammo.

PROPOSIZIONE XI.

I parallelogrammi ACDB, ECDF *eretti fopra la fteffa bafe* CD, *e tra le medefime parallele* AF, CD, *fono uguali tra loro.* FIG. 57.

IMperocchè le due rette *AB*, *EF* effendo alla oppofta *CD* uguali, faranno uguali tra loro, ed aggiunta all'una, e all'altra la *BE*, farà *AE* uguale a *BF*; ed è pure *AC* uguale a *BD*, e l'angolo efterno *BDF* uguale all'interno *CAE*; dunque fono uguali i triangoli *ACE*, *BDF*, e nella prima figura fegandofi in *G* le rette *CE*, *BD*, tolto di comune *BGE* a' detti triangoli, rimangono uguali i trapezj *ABGC*, ed *EGDF*, onde aggiunto ad effi di comune l'altro triangolo *CGD*, rimane il parallelogrammo *ACDB* uguale all'altro *ECDF*; ma nella feconda figura aggiunto il trapezio *CEBD* a quei triangoli uguali *ACE*, *BDF*, riefce pure il parallelogrammo *ACDB* uguale all'altro *ECDF*. Il che &c. FIG. 58.

COROLLARJ.

I. Se con gl'intervalli de' lati uguali *AC*, *BD* del parallelogrammo *ACDB*, fi defcriveranno FIG. 59.

 den-

dentro le parallele due archi circolari uguali *CE*, *DF*, sarà ancora la figura *CEFD*, compresa da detti archi, e dalle medesime parallele, uguale al parallelogrammo *ACDB*, perchè essendo uguali i settori *ACE*, *BDF*, tolta nella prima figura la porzione *BGE*, ed aggiunta *CGD*, riesce *ABDC* uguale a *CEFD*; e nella figura seconda aggiunto a quei settori lo spazio *CEBD*, riesce pure *ACDB* uguale a *CEFD*.

FIG. 60. Lo stesso accade ne' semicircoli interi tra loro uguali *AEC*, *BFD* tra le stesse parallele descritti; perchè aggiuntovi lo spazio *CEABD*, riesce il parallelogrammo *ACDB* uguale pure alla figura *CEABFD*; e così pure seguirebbe, se vi fossero altre curve simili, ed uguali.

FIG. 61. II. Se i parallelogrammi *ABDC*, *EFIH* sopra le basi uguali *CD*, *HI*, sono descritti tra le medesime parallele *CI*, *AF*, essi pure saranno uguali; imperocchè essendo *EF* uguale ad *HI*, sarà pure uguale a *CD*, e congiunte le rette *CE*, *DF*, si farà il parallelogrammo *CEFD*, cui sarà uguale *ABCD*, avendo con esso la stessa base *CD*; e gli sarà ancora uguale *EFIH*, avendo con esso la stessa base *EF*; dunque *ABDC* è uguale ad *EFIH*.

FIG. 62. III. Quindi, se si adattano alli due lati *AC*, *BD* gli archi circolari uguali *AMC*, *BND*, ed agli altri lati *EH*, *FI*, altri archi uguali *EK*, *FL*, o altre curve pari, sarà similmente lo spazio *AMCDNB* uguale all' altro *EKLF*, essendo quello uguale al parallelogrammo *ABDC*, e quest' altro uguale all' altro parallelogrammo *EFIH*, uguale a quello; e se questi archi si sega-

gano in *G*, ancora tolto *KGD*, resta *CMABNGK* uguale all' altro spazio *EGDLF*.

PROPOSIZIONE XII.

I triangoli CAD, CED *sopra la stessa base* CD *descritti, co' vertici* A, E *nella medesima retta parallela alla sua base, saranno uguali; ed ancora i due triangoli* CAD, DFG *fatti nelle medesime parallele sopra basi uguali* CD, DG *sono uguali.* FIG. 63.

IMperocchè tirata la *CB* parallela a *DA*, e la *DF* parallela a *CE*, saranno li due parallelogrammi *ABCD*, *EFDC* uguali; ma il triangolo *CAD* è la metà del primo parallelogrammo, e l' altro triangolo *CED* è la metà del secondo, dunque essi triangoli sono uguali. E similmente paragonato il parallelogrammo *ABCD* ad un altro *EFGD*, che hanno le basi uguali nelle medesime parallele, si trovano uguali; dunque ancora i triangoli *CAD*, *DFG*, che sono la metà di essi, devono essere uguali. Il che &c.

COROLLARJ.

I. In qualunque triangolo *DAC*, divisa pel mezzo in *E* la base *DC*, e congiunta al vertice la *AE*, sarà esso triangolo diviso in due triangoli uguali *DAE*, *CAE*; e nel triangolo *BAC* divisa in tre parti la base *BC* ne' punti *D*, *E*, e congiunte al vertice le rette *AD*, *AE*, resta diviso esso triangolo in tre triangoli uguali; e similmente divisa la base in quante parti uguali si voglia, resterà diviso il triangolo con le rette FIG. 64.

condotte al vertice in altrettanti triangoli uguali, per essere il loro vertice nella medesima linea *AF* parallela alla base.

FIG. 65. II. Dato un punto *D* nel lato *AB* del triangolo *ABC*, si può da esso tirare una linea, che tagli dal medesimo triangolo qualunque richiesta parte: in questa maniera. Congiunta all' angolo *C* opposto la retta *CD*, e nel lato *AB* presa la porzione *BF*, che sia tal parte di esso lato, quale si vorrebbe essere la porzione del triangolo da segarsi pel punto *D*; per esempio se si vuole essere il terzo, sia *BF* la terza parte di *BA*, e condotta *FE* parallela a *DC*, segante il lato *BC* in *E*, si congiunga *DE*; sarà il triangolo *BED* quella porzione, che si voleva dell' intero *ABC*, cioè la terza parte di esso: perchè congiunta *CF* sarebbe *BCF* un terzo di *BCA*; ed essendo *EDF* uguale ad *ECF*, aggiunto *BEF* all' uno, e all' altro, sarà pure *BED* uguale a *BCF*; dunque ancora *BED* è la terza parte del triangolo *ABC*; e così di qualunque altra porzione può farsi.

FIG. 66. III. Volendosi fare al triangolo *ABG* un parallelogrammo uguale, divisa la base *BG* per mezzo in *C*, e per il vertice *A* condotta la *AE* parallela alla base *BG*, sopra la *BC* metà della base tirate alla parallela due altre linee parallele *BE*, *CF*, sarà *BCFE* uguale al dato triangolo *ABG*; perchè congiunta la *CA*, e la *BF*, tanto *BCFE* è doppio del triangolo *BFC*, che *BAG* è doppio di *BAC*, e sono *BFC*, *BAC* triangoli uguali, dunque ancora *BAG* è uguale a' parallelogrammo *BCFE*. che pure è il doppio di

di qualunque triangolo *BAC* fopra la fteffa, o fopra ugual bafe, e tra le medefime parallele pofto, ficcome è il doppio del triangolo *BFC* fatto dal fuo diametro.

IV. Quindi ogni triangolo *ABG* è uguale al prodotto della metà di fua bafe nella perpendicolare, condottavi fopra dal vertice; perchè fopra la bafe *BG* condotta la perpendicolare *AD*, ed alla fteffa *AD* tirate parallele *BE*, e *CF* da' termini della *BC*, metà della bafe *BG*, è il triangolo uguale al parallelogrammo rettangolo *BCFE*, che è il prodotto della metà di effa bafe *BC* nel lato *CF*, uguale alla perpendicolare *AD*.

V. Onde può trovarfi la mifura di qualunque fpazio rettilineo *AFBGC*, tirate le rette da un angolo agli altri, come *AB*, *AG*, dividendolo in più triangoli *AFB*, *ABG*, *AGC*, li quali poffono mifurarfi, tirando le perpendicolari fopra le loro bafi, e moltiplicando effa perpendicolare con la metà della bafe. Per efempio, fe *AB* è uguale ad 8 braccia, e la perpendicolare *FH* foffe 3 braccia, moltiplicando il 3 nella metà di 8, cioè in 4, fi fa 12 braccia quadre, per mifura del triangolo *AFB*; fe *BG* è di 6 braccia, e condottavi la perpendicolare *AD*, che fia braccia 7, moltiplicando 7 nella metà di 6. che è 3, fi fa 21 braccia quadre, che è la mifura del triangolo *ABG*; ed effendo *AG* braccia 10, la di cui metà è 5, condottavi la perpendicolare *CE* uguale a 4; moltiplicandofi fi fanno 20 braccia per mifura del triangolo *ACG*; onde tutto lo fpazio rettilineo *AFBGC* comprenderà 53 braccia quadre, effendo tale il compleffo di 12, FIG. 67.

e 21, e 20, ritrovate in que' triangoli ivi compresi.

FIG. 68. VI. Finalmente si cava da questa proposizione, che se sopra la medesima linea retta *BF* fossero con la stessa base, o con le basi uguali *BC*, *EF* due triangoli uguali *BAC*, *EDF*, la retta *AD*, che congiunge i loro vertici, sarà parallela alla base; imperocchè se dal punto *A* tirata una tale parallela, non passasse per l' angolo *D*, ma segasse il lato *ED* sotto, o sopra in *G*, congiunta *FG*, sarebbe il triangolo *EGF* uguale all' altro *BAC*, e però ancora ad *EDF*, onde sarebbe la parte uguale al tutto; il che è impossibile.

PROPOSIZIONE XIII.

In qualunque parallelogrammo AFGH *tirato il diametro* AG, *e per un punto* D *di esso tirate le parallele a' lati* BDE, CDI, *riusciranno uguali i parallelogrammi* EDCF, BDIH, *che diconsi* Complementi *di esso parallelogrammo* AFGH.

TAV. V. FIG. 69. IMperocchè essendo il triangolo *AGF* uguale all' altro *AGH*, e ne' parallelogrammi *ACDB*, ed *IDEG* essendo il triangolo *ADC* uguale a *DAB*, e l' altro *DEG* uguale a *DIG*; dunque il resto *EDCF* è uguale al residuo *BDIH*, che sono i Complementi.

COROLLARJ.

FIG. 70. I. Dato un triangolo *LFN*, si può fargli uguale un parallelogrammo di qualunque lunghezza, e con

e con qualſivoglia angolo dato; perchè nella retta della baſe *FN* preſa *FE* uguale alla metà di eſſa, e fatto l' angolo *EFC* uguale al dato, indi tirata *ED* parallela ad *FC*, le quali concorrano con la *CL* tirata dal vertice *L* parallela alla baſe, riuſcirà il parallelogrammo *EFCD* uguale al dato triangolo *FLN* (a); e prolungata la *CD* in *I*, ſicchè ſia *DI* uguale alla propoſta lunghezza, che ſi vuole abbia il parallelogrammo uguale al dato triangolo, ſi compiſca il parallelogrammo *DIGE*, e tirato il diametro *GD*, che convenga con il lato *FC* in *A*, ſi tiri *AH* parallela alla ſteſſa *DI*, ſegata da' lati *ED*, *GI*, in *B*, *H*, ſarà il parallelogrammo *IDBH* uguale ad *EFCD* (eſſendo queſti i complementi di *AFGH*) e però uguale al triangolo *LFN*; ed ha la lunghezza data *DI*, e l' angolo *BDI* uguale ad *EDC*, ed al dato *CFE* (b); dunque ſi è fatto ciò, che chiedevaſi

(a) Corol. 3. Prop. 12.

(b) Corol. 2 Prop. 10

II. Così ancora qualunque figura rettilinea può ridurſi in un parallelogrammo di qualche data lunghezza, e con l' angolo dato, potendo eſſa figura miſurarſi, come ſi è fatto nel Corollario V. della precedente Propoſizione, e però ridurſi ancor eſſa in un triangolo, che abbia la detta miſura: Per eſempio, in quel Corollario eſſendoſi trovata quella figura rettilinea uguale a 53 braccia quadre, può ridurſi ad un triangolo, che abbia 12 braccia per baſe, ed 8 con $\frac{5}{6}$ di braccio per altezza, perchè la metà della baſe eſſendo braccia 6, e la perpendicolare 8 $\frac{5}{6}$, moltiplicando queſta in quella, ne rieſce 53 braccia quadre, miſura di quello ſpazio rettilineo.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 71. *Nel medesimo segmento* ABDE *di un cerchio, ciaschedun angolo* ABE, ADE, *fatto nell' arco circolare con le rette condotte a' termini della sua corda* AE *sarà di uguale grandezza.*

PErchè condotti al centro i raggi *AC*, *EC*, l' angolo è doppio di qualunque altro *ABE*, o *ADE* fatti all' arco [a]; dunque essi angoli nel medesimo segmento sono tra di loro uguali. Il che &c.

(a) Corol. 5. Prop. 9.

COROLLARJ.

I. Viceversa, se gli angoli fatti sopra la medesima retta *AE*, cioè *ABE*, *ADE*, sono uguali, per gli stessi punti *A*, *B*, *D*, *E*, potrà passare il medesimo arco circolare; perchè se passasse solamente per li tre punti *A*, *E*, *D*, ma non pel quarto *B*, anzi segasse la retta *EB* in *F*, congiunta *AF*, riuscirebbe l' angolo *AFE* uguale ad *ADE*, essendo nel medesimo segmento; dunque ancora *AFE* sarebbe uguale all' interno opposto *ABF*; il che è impossibile [b].

(b) Corol. 1. Prop. 8.

II. Qualsivoglia quadrilatero *ABCD* inscritto nel cerchio ha gli angoli opposti uguali a due retti; perchè tirate le rette *AC*, *BD*, gli angoli FIG. 72. *ACB*, *ADB*, che sono nel medesimo segmento circolare, saranno uguali, e sono uguali ancora li due *ACD*, *ABD*; dunque l' angolo *DCB*, che è uguale alli due *ACB*, *ACD*, uguaglia li due *ADB*, *ABD*; dunque aggiuntovi l' angolo *BAD*, li due angoli opposti *DCB*, e *BAD* sono

ſono uguali agli angoli del triangolo *ABD*; dunque ſono due retti.

III Prolungato fuori del cerchio il lato *BA* in *E*, ſarà l' angolo eſterno *EAD* uguale all' interno oppoſto *DCB*, perchè ancora *EAD* con lo ſteſſo *BAD* fa due angoli retti.

IV. Dunque ſe in un quadrilatero li due angoli oppoſti ſono uguali a due retti, potrà paſſare un cerchio per li quattro angoli di eſſo; perchè ſe paſſaſſe per gli tre punti *A*, *B*, *C*, ma non per *D*, anzi ſegaſſe la retta *CD* in *F*, congiunta *AF*, ſarebbero gli angoli *ABC*, *AFC* uguali a due retti, ma ſono a ciò uguali queſti due *ABC*, *ADC*, dunque ſarebbe l' angolo *ADC* uguale all' altro *AFC*; il che è impoſſibile, eſſendo l' eſterno maggiore dell' interno oppoſto nel triangolo *ADF*.

PROPOSIZIONE XV.

Se la retta AF *tocca il cerchio in* A, *e la retta* AD *ſega eſſo cerchio in* D, *l' angolo* FAD *fatto dalla tangente, e dalla ſegante, ſarà uguale all' angolo* ABD *fatto nell' alterna porzione del cerchio; e così ancora l' angolo* EAD *ſarà uguale all' angolo* AGD *fatto nell' altro alterno ſegmento.* FIG. 73

IMperocchè congiunto il contatto *A* col centro *C*, e tirato il diametro *ACB*, congiunta la *BD*, ſarà l'angolo *ADB* retto (a), dunque li due ſuſſeguenti di eſſo triangolo, *ABD*, e *DAB* ſono uguali ad un retto, cioè all' angolo *BAF*, che comprende appunto li due *DAF*, e *DAB*; dun-

(a) Corol. 6. Prop. 9.

dunque *DAF* bisogna che sia uguale all'altro *A B D*, fatto nell'alterno segmento; e perchè ancora *AGD* con *ABD* sono uguali a due retti (a), e però alli due *DAF*, *DAE* essendo *DAF* uguale ad *ABD*, l'altro *DAE* sarà pure uguale ad *AGD*; dunque l'angolo contenuto dalla tangente, e da qualunque segante uguaglia l'angolo, che riesce nell'alterno segmento del cerchio. Il che &c.

(a) Corol. 2. Prop. 14.

COROLLARJ.

I. Quindi è chiaro, che essendo il segmento, un mezzo cerchio, l'angolo *ADB* in esso descritto uguaglia l'angolo retto *CAE*; nel segmento poi maggiore l'angolo *ABD* è sempre acuto, perchè uguaglia l'angolo *DAF*; e nel segmento minore l'angolo *AGD* è ottuso, uguagliando l'angolo *GAE*, maggiore del retto *CA E*,

II. Quindi ancora si ha, come si possa dal cerchio dividere una porzione capace d'un angolo dato, bastando dal contatto tirare una retta, che faccia con la tangente l'angolo dato, perchè così il segmento segato da quella retta averà in se quell'angolo, che è proposto, dalla parte alterna, e dalla medesima sarà il segmento capace dell'altro angolo, che con quello dato compisce due retti.

III. E se sopra la data retta *AD* si dovrà fare un segmento circolare, capace d'un angolo dato, facendo il dato angolo *DAF*, e sopra la *AF* eretta la perpendicolare *AB*, ed indi all'angolo rimanente *DAB* fatto sopra la *AD* l'angolo uguale *ADC*, convenendo la retta *DC*

con

con *AB* in *C*, descritto dal centro *C* con l' intervallo *CA*, il circolo *ADB*, sarà il segmento *ABD* sopra la retta data *AD* eretto, capace del dato angolo *DAF*.

IV. Volendo nel cerchio *ABG* descrivere un triangolo, che abbia ciascuno de' suoi angoli uguale a ciascuno degli angoli d' un triangolo dato *MLN*, tirata la tangente *EAF*, e fatto l' angolo *BAF* uguale ad *MLN*, e l'angolo *GAE* uguale all' altro *LNM*, segandosi il cerchio da queste rette in *B*, e *G*, congiunta *GB*, sarà il triangolo *AGB* equiangolo al dato *MLN*, perchè l' angolo *AGB* sarà uguale a *BAF*, cioè ad *MLN*, e l' angolo *ABG* uguale all'altro *GAE*, cioè ad *LNM*; e però il rimanente *GAB* sarà uguale al residuo *LMN*. FIG. 74.

PROPOSIZIONE XVI.

In un dato cerchio descrivere un quadrilatero ABED, *rettangolo, ed equilatero, il quale si nomina* Quadrato. FIG. 75.

CONdotti per lo centro *C* due diametri *AE*, *BD*, che seghinsi in *C* perpendicolarmente, cioè ad angoli retti; congiunte quindi le rette *AB*, *BE*, *ED*, *DA*, sarà fatto il quadrato, che è un parallelogrammo, rettangolo, ed equilatero; imperocchè ne' triangoli *ACB*, *BCE*, *ECD*, *DCA* essendo uguali tutti gli angoli retti in *C*, ed uguali tutti i lati de' raggi *CA*, *CB*, *CE*, *CD*, ancora tutte le loro basi *AB*, *BE*, *ED*, *DA* saranno uguali; dunque è equilatero; e perchè tutti gli angoli *ABE*, *BED*, *EDA*, *DAB* sono ne'

semi-

ſemicircoli, tutti ſono retti; dunque le linee oppoſte ſono parallele, e tutto eſſo parallelogrammo equilatero è ancora rettangolo; e però diceſi quadrato.

COROLLARJ.

FIG. 76. I. Se ſi voleſſe ſopra a una data linea *AB* fare il quadrato, gli ſi alzi dal termine *A* la perpendicolare *AD* uguale alla *AB*, e tirata la *DE* parallela ad *AB*, e la *BE* parallela ad *AD*, ſarà fatto il quadrato *ABED*; perchè eſſendo *ABED* un parallelogrammo, in cui i lati oppoſti ſono uguali, *AB* a *DE*, e *BE* ad *AD*, ſiccome *AB*, ed *AD* ſono uguali, ancora ciaſcuno degli altri due ſarà uguale alla *AB*; ed eſſendo gli angoli interni tra le parallele uguali a due retti, ſiccome ſi è fatto retto *BAD*, ſarà pure retto *ABE*, e *BED*, ed *ADE*; dunque è queſto quadrilatero di lati uguali, e di ciaſcun angolo retto, e però è il Quadrato.

FIG. 77. II. Quindi è chiaro, che in ogni parallelogrammmo, ſe un angolo è retto, ciaſcun altro di eſſo deve eſſer retto.

III. Al dato cerchio *ABED* volendo circoſcrivere un quadrato, condotti per lo centro *C* li diametri *AE*, *BD* perpendicolarmente, cioè ad angoli retti, ſi tirino per li punti *A*, *B*, *E*, *D* le tangenti *GAF*, *FBI*, *IEH*, *HDG*, che saranno parallele a' diametri oppoſti, facendo pure con li ſemidiametri angolo retto. Sarà eſſo *GFIH* il quadrato circoſcritto, eſſendo qualunque di tali lati uguale al diametro oppoſto, onde ſiccome ſono uguali i diametri, così eſſi lati tan-

tangenti, paralleli ad essi, devono essere uguali; e qualunque angolo *AGD* è retto nel parallelogrammo *ACDG* (che pure è un quadrato minore) siccome gli altri angoli *ACD*, *CDG*, *CAG* sono retti; dunque *GFIH* è rettangolo, ed equilatero, onde è il quadrato circoscritto al cerchio.

IV. E' manifesto, che il quadrato circoscritto al cerchio è doppio dell' altro inscritto *ABED*, perchè ogni quadrato del raggio è doppio del suo triangolo, cioè *ACDG* doppio di *ACD*, ed *ACBF*, doppio di *ACB*; e *BIEC* doppio di *BCE*; ed *EHDC* duplo di *ECD*; dunque li quattro quadrati de' raggi compiendo il quadrato *GFIH* circoscritto al cerchio, e li 4 triangoli suddetti compiendo il quadrato inscritto *ABED*, bisogna che quello sia duplo di questo.

V. Si può ancora inscrivere nel cerchio un parallelogrammo rettangolo, ma non equilatero, come tirati due diametri per lo centro *C*, non perpendicolarmente, ma inclinati l' uno all' altro *AL*, *NH*, e congiunte le rette *AN*, *HL*, che saranno uguali essendo basi de' triangoli *ACN*, *HCL* composti intorno ad angolo uguale con raggi uguali, e tirate pure le altre due *AH*, *NL*. che pure sono uguali basi de' triangoli *ACH*, *NCL*, composti con uguale angolo di raggi uguali; si averanno le parallele *AN*, *HL*, ed *NL*, *AH*; e si congiungono ad angoli retti *AHL*, *HAN*, *ANL*, *NLH*, essendo fatti ne' semicircoli, onde ne risulta il parallelogrammo *AHLN*, ch' è rettangolo, ma non quadrato, perchè i lati *HL*, *AN*, opposti all' angolo ottuso, sono maggiori degli FIG. 78.

altri

altri due *AH*, *NL* opposti all' angolo acuto. Ma simile rettangolo non equilatero, cioè non quadrato, non può essere circoscritto al cerchio, non potendo tirarsi al cerchio dal medesimo punto le tangenti disuguali [a].

(b) Corol. 5. Prop. 6.

VI. Viceversa può circoscriversi al cerchio un parallelogrammo non rettangolo *BDEF*, tirate le tangenti da i termini de' due diametri *AL*, *HN*, inclinati l' uno sopra l' altro, perchè saranno parallele *BD* ad *EF*, facendo angoli retti col diametro *AL*, e *BF*, ed *ED*, che fanno angoli retti col diametro *NH*; ma non sono essi lati congiunti ad angoli retti, essendo l' angolo *ABH*, e l' opposto *NEL* angoli ottusi, perchè nel quadrilatero *ACHB*, e nell' altro *NCLE* sono gli angoli in *C* acuti, che con l' opposto fanno due retti, come sono retti gli altri due *CAB*, *CHB*, ed altresì *CNE*, e *CLE* fatti da' raggi colle tangenti; e parimente gli angoli *ADN*, ed *HFL* sono acuti, come gli opposti *ACN*, *HCL* sono ottusi; dunque tale parallelogrammo *BDEF* circoscritto al cerchio non è rettangolo; ma dentro al cerchio non potrebbe iscriversi un simile parallelogrammo, perchè essendo retti gli angoli fatti nel semicircolo sopra i diametri, non possono essere che rettangoli i parallelogrammi inscritti.

FIG. 79.

PROPOSIZIONE XVII.

FIG. 80. *Data qualunque figura rettilinea* MNOPQ, *circoscrivere ad un dato cerchio una figura di altrettanti lati, equiangola ad essa.*

Si

SI prolunghi ciascun lato della data figura al di fuori, *NM* in *R*, *ON* in *S* &c. Tutti questi angoli esterni essendo uguali a quattro retti (a), si potranno descrivere intorno al centro *C* del cerchio; ivi dunque condotto qualunque raggio *CB*, si faccia l'angolo *BCF* uguale a *QMR*, poi l'angolo *BCD* uguale ad *MNS*, indi l'angolo *DCE* uguale ad *NOT*, poi *ECA* uguale ad *OPV*, ed il rimanente *ACF* sarà uguale all'ultimo residuo *PQX*; indi da' termini di questi raggi condotte le tangenti, con cui faranno angoli retti, ne risulterà la figura *HIKLG* circoscritta al cerchio, la quale sarà equiangola alla figura data *MNOPQ* con altrettanti lati; imperocchè in qualunque quadrilatero *FCBH* essendo gli angoli in *F*, e *B* retti, gli altri due opposti *BCF*, *FHB* saranno uguali a due retti, e però uguali alli due *QMR*, *QMN*; ed è *BCF* uguale a *QMR*, dunque l'altro *FHB* deve essere uguale a *QMN*. Similmente si proverà essere l'angolo *BID* uguale ad *MNO*, e l'altro *DKE* uguale ad *NOP*; e così gli altri si mostreranno uguali; dunque si è circoscritta al cerchio la figura equiangola alla data. Il che &c.

(a) Corol. 8. Prop. 9.

COROLLARJ.

I. Se il dato Poligono avesse tutti gli angoli uguali *M*, *N*, *O*, *P*, *Q* al di dentro, averebbe pure al di fuori uguali gli esterni; e però sarebbero uguali gli angoli fatti al centro *C* del cerchio; onde gli archi corrispondenti *FB*, *BD*, *DE* &c. sarebbero uguali, e le tangenti *FH*, *HB* del primo uguaglierebbero le tangenti *BI*, *ID*

del secondo, e così le altre; dunque i lati ancora *HI*, *IK*, *KL*, *LG*, *GH* riuscirebbero uguali; e però il poligono circoscritto sarebbe equiangolo, ed equilatero.

II. Congiunte poi le rette *FB*, *BD*, *DE*, *EA*, *AF* riuscirà un poligono pure equilatero, ed equiangolo inscritto nel cerchio, se tale è il circoscritto; ma se il circoscritto non ha gli angoli uguali, non essendo esso equilatero, l' inscritto non averà ne meno gli angoli uguali alli corrispondenti del circoscritto, o del dato *MNOPQ*. Imperocchè, condotte le rette *CH*, *CG*, *CL* &c. queste dividono per mezzo gli angoli della figura circoscritta, mentre le due tangenti dal medesimo punto, come *GA*, *GF*, sono uguali, il raggio *CA* uguale a *CF*, e la *CG* comune ad ambidue i triangoli *CAG*, *CFG*, e però l' angolo ancora *CGA* è uguale a *CGF*; e similmente *CLA* uguale a *CLE* &c. dunque se l' angolo *AGF* non è uguale all' angolo *ALE*, non sarà la metà del primo uguale alla metà del secondo; e però la metà dell' uno con quella dell' altro non fa un angolo uguale a veruno di essi; ma l' angolo *FAE* uguaglia le due meta di detti angoli *CGF*, *CLE*, perchè nel quadrilatero *CFGA* essendo li due angoli opposti uguali a due retti, come *CFG*, *CAG*, potrebbe passare un cerchio intorno a quei quattro punti *C*, *F*, *G*, *A* (a), e però l' angolo *CGF* sarà uguale a *CGA*. E similmente circoscritto un cerchio intorno al quadrilatero *ACEL*, l' angolo *CAL* deve essere parimente uguale a *CLE*; dunque esso angolo *FAE* non può essere uguale, ne ad *AGF*, ne ad *ALE*, essendo

(a) Corol. 4. Prop. 14.

essendo compreso dalla metà dell' uno, e dalla metà dell' altro.

III. Volendo inscrivere un cerchio dentro qualsivoglia triangolo *EHF*, divisi per mezzo due de' suoi angoli *FEH*, *FHE* con le rette *EC*, *HC* convenienti in *C*, e condotte dal punto *C* sopra i lati le perpendicolari *CA*, *CD*, *CB*, saranno esse tra di loro uguali, perchè il triangolo *CEB* rivoltandosi sopra il conseguente *CEA*, per essere l' angolo *BEC* uguale ad *AEC*, si uniranno insieme le rette *EB*, *EA*, e non potendo il retto angolo *CBE* adattarsi sopra la retta *EH* fuori del retto angolo *CAE*, converranno insieme; onde la *CB* sarà uguale alla *CA*; e similmente ancora *CD* si proverà uguale alla *CA*, poichè essendo l' angolo *CHD* uguale a *CHA*, rivoltandosi *HDC* sopra il triangolo *HAC*, parimente converranno *HD* con *HA*, e *CD* con la stessa *CA*, non potendo l' angolo retto cadere altrove; dunque le tre perpendicolari essendo uguali, col centro *C*, e col raggio *CB* descritto un cerchio, passerà per li punti *B*, *A*, *D*, e sarà toccato da' lati *EF*, *EH*, *HF* perpendicolari a' suoi raggi; onde sarà inscritto esso cerchio nel triangolo dato. FIG. 81.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se sopra i lati AB, BC *del triangolo* ABC *si faranno due qualsivoglia parallelogrammi* ABHG, *e* BCEF, *li cui lati opposti a' lati* AB, BC *del triangolo, convengano in* I, *condotta pel vertice* B *del triangolo la retta* IBD, *a cui da' termini* A, C *si conducano parallele* AK, CM, *con-* FIG. 82.

correnti con esse GH, EF, *in* K, M, *congiunta* KM, *sarà* ACMK *un parallelogrammo sopra la base uguale alli due parallelogrammi* ABHG, BCEF, *fatti sopra i lati del dato triangolo.*

IMperocchè, essendo tanto *AK*, che *CM* parallele, ed uguali a *BI*, per essere tanto *BAKI*, che *BIMC* parallelogrammi, deve riuscire *KM* parallela alla *AC*, dunque *ACMK* è un parallelogrammo, di cui la parte *DCML* è uguale a *CMIB*, il quale pure è uguale a *CBFE*, essendo li due primi sopra la stessa base *CM*, e tra le medesime parallele *CM*, *DI*, e questi altri due secondi sopra la medesima base *CB*, e tra le stesse parallele *CB*, *EI*; ed ancora il rimanente *ADLK* è uguale ad *AKIB*, avendo la stessa base *AK* tra le parallele *AK*, *DI*, ed altresì *AKIB* è uguale ad *ABHG*, essendo sulla medesima base *AB*, e tra le stesse parallele *AB*, *GI*; dunque *DCML*, ed *ADLK*, cioè tutto il parallelogrammo *ACMK* è uguale alli due parallelogrammi *CBFE*, ed *ABHG*. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 83. I. Nel Triangolo rettangolo *ABC* descritti li quadrati de' lati *AB*, *CB*, che sono *ABHG*, e *CBFE*, sono questi uguali al quadrato della base *AC*; imperocchè il parallelogrammo *ACMK* descritto, come in questa proposizione, che è uguale a que' due parallelogrammi quadrati, si prova essere appunto il quadrato della Ipotenusa *AC*; perchè essendo *FB* uguale a *BC*, ed *FI* uguale alla parallela *BH*, la quale è uguale a *BA*; ed

ed essendo l' angolo BFI retto uguale al retto CBA, ne segue, che ancora BI base del triangolo FBI è uguale ad AC base di ABC; ed è BI uguale alla parallela CM, dunque AC, e CM sono uguali; ed ancora essendo l' angolo FBI uguale all' angolo BCA, e l' angolo IBH uguale a BCM, cioè l' esterno all' interno opposto nelle parallele; dunque l' angolo FBH, che è uguale al retto ABC, è uguale all' angolo ACM, il quale però sarà retto; e così pure saranno retti gli altri CAK, CMK, AKM; dunque tale parallelogrammo $ACMK$ è equilatero, e rettangolo; e però il quadrato della base AC è uguale alli due quadrati de' lati AB, CB. Il che &c.

II. La retta IBD è perpendicolare alla base AC, essendo parallela ad MC, e ad AK, che fanno angolo retto colla medesima base; onde il quadrato $BCEF$ del lato BC è uguale al rettangolo $CDLM$, e l' altro quadrato $ABHG$ del lato AB è uguale al rettangolo $ADLK$, essendo $BCEF$ uguale a $BCMI$, e questo a $CDLM$, come si è mostrato di sopra; onde essendo CM uguale a CA, il rettangolo di AC in CD uguaglia il quadrato del lato CB, ed il rettangolo della stessa AC in AD (le quali parti CD, AD, sono divise dalla perpendicolare BD condotta sulla base dal vertice del triangolo rettangolo) uguaglia l' altro quadrato del lato AB; ed essendo questi due quadrati, e questi due rettangoli uguali al quadrato di AC; se ne deduce, che il quadrato d' una linea AC divisa in D è uguale a' rettangoli di AC in AD, e di AC, in DC.

FIG 84. III. Viceversa, se in un triangolo ABC i quadrati de' due lati AB, e BC sono uguali al quadrato della base AC, bisogna che l' angolo ABC sia retto; imperocchè facendo dall' altra parte l' angolo retto ABD, e presa BD uguale a BC, congiunta AD, sarà il quadrato AD uguale a' quadrati AB, BD, ma questi sono gli stessi che AB, BC, dunque il quadrato AD è uguale al quadrato AC; e però essendo uguale ancora AD ad AC, e gli triangoli ABC, ABD avendo ciascun lato uguale al suo corrispondente, sarà l' angolo pure ABC uguale all' angolo retto ABD.

FIG. 85. IV. Dati più quadrati delle linee A, B, C, D, si potrà trovarne uno uguale a tutti; poichè posta EF uguale ad A, e ad angolo retto postavi FG uguale a B, congiunta EG, averà questa il suo quadrato uguale alli due EF, FG, che sono gli stessi quadrati di A, e B; e posta ad angolo retto sopra la EG la retta GH uguale a C, e congiunta EH, sarà il suo quadrato uguale a' quadrati EG, GH, cioè a quelli di A, di B, e di C; e similmente posta IH uguale a D sopra la EH ad angolo retto, congiunta la EI, sarà il suo quadrato uguale a' quadrati di EH, e di HI, cioè a tutti li quadrati di A, di B, di C, e di D; e così se altri ve ne fossero, si troverebbe il quadrato uguale alla somma di tutti.

FIG. 86. V. Dal quadrato di AB volendo levare il quadrato AD, e trovare il quadrato uguale all' eccesso di quello sopra questo, si descriva il semicircolo ADB sopra il diametro AB, ed in esso adattata la retta AD, si congiunga BD; il

qua-

quadrato di questa sarà l'eccesso del quadrato *AB* sopra il quadrato *AD*, essendo l'angolo *ADB* retto, e però esso quadrato *AB* uguale ad ambidue i quadrati *AD*, e *BD*.

PROPOSIZIONE XIX.

Se la retta AB *è divisa in* E, *il quadrato di* AB, *che sia* ABCD, *sarà uguale a' quadrati delle parti* AE, EB, *con due rettangoli fatti da una parte nell' altra.* TAV. VI. FIG. 87.

SI conduca il diametro *AC*, e dal punto *E* tirata la *EG* parallela a *BC*, segante *AC* in *I*, per il punto *I* si tiri la *FIH* parallela ad *AB*. Sarà *AEIF* il quadrato di *AE*, ed *IHCG* il quadrato di *IH*, cioè dell' altra parte *EB*; imperocchè, essendo *AB* uguale a *BC*, l' angolo *BAC* è uguale a *BCA*, ma a questi pure sono uguali gli angoli *CIH*, *AIE*, essendo gli esterni uguali agl' interni opposti nelle parallele; dunque ancora *IE* è uguale ad *AE*, e *CH* uguale ad *HI*; ed essendo *AEI*, *IHC* angoli retti uguali ad *ABC*, dunque li parallelogrammi *AEIF*, *IHCG* sono equilateri rettangoli, e però tutt' uno con i quadrati di *AE*, e di *EB* uguale ad *IH*; ma li rettangoli *BEIH*, *IFDG* sono pure uguali [(a)], e composti dalle parti *AE*, *EB*; dunque il quadrato di *AB*, cioè *ABCD*, è uguale a quadrati delle parti *AE*, *EB*, ed a' due rettangoli di una parte nell' altra, pareggiando li due quadrati *AEIF*, *HCGI*, con li due rettangoli *BEIH*, *IFDG* Il che &c.

(a) Prop. 13

COROLLARJ.

FIG. 88. I. Per qualunque punto *I* preso nel diametro del quadrato, condotte le parallele a i lati, ne riesce pure un quadrato, essendosi mostrato, essere *AEIF* il quadrato di *AE*, ed *IHCG* il quadrato di *IH*; ed ancora presi nel diametro due punti *I*, *O*, e condotte le parallele a i lati, riuscirà *INOM* un quadrato di *IN* &c.

II. La differenza di due quadrati *AB*, ed *AE* uguaglia il rettangolo della somma de' lati nella loro differenza; perchè prolungata *GIE* in *EL* uguale ad *IE*, e compiuto il rettangolo *CGLK*, sarà *LEBK* uguale ad *IEBH*, cioè ancora ad *FIGD*, ed è *FIGD* con *GEBC* la differenza del quadrato *ABCD* dall' altro *AEIF*; dunque ancora *LEBK* con *GEBC*, cioè *CGLK* rettangolo fatto dalla *GL* uguale alla somma di *AB*, ed *AE* (essendo *GE* uguale a *CB*, e però ad *AB*, ed essendo *EL* uguale ad *EI*, e però ad *AE*) nella *LK* uguale alla differenza di *AB*, ed *AE*, (essendo *LK* uguale ad *EB*, che è *AB* meno *AE*) sarà uguale alla differenza del quadrato *AB* dal quadrato *AE*.

FIG. 89. III. Segata la retta *AB* per mezzo in *C*, e preso in essa un altro punto *D*, il rettangolo *ADB* col quadrato *CD* sarà uguale al quadrato *CB*; imperocchè essendo *AC* uguale a *CB*, la retta *AD* è la somma di *CB*, e *CD*, e la retta *DB* è la differenza delle stesse; dunque il rettangolo *ADB* è l' eccesso del quadrato *CB* sopra il quadrato *CD*, e però aggiunto all'uno, ed all' altro il quadrato *CD*, sarà il rettangolo

ADB

ADB col quadrato *CD* uguale al quadrato *CB*, che contiene esso quadrato *CD* col detto eccesso.

IV. Ma se fosse preso il punto *D* nella retta *AB*, prolungata, e divisa per mezzo *AB* in *C*, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *CB* uguale al quadrato *CD*; imperocchè *AD* è la somma di *CD*, e di *CB*, e la *BD* è la loro differenza; dunque il rettangolo *ADB* uguaglia l'eccesso del quadrato *CD* sopra il quadrato *CB*; onde all'uno, ed all'altro aggiunto il quadrato *CB*, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *CB* uguale al quadrato *CD*. FIG. 90.

V. Nel triangolo Isoscele *AEB* condotta dal vertice *E* sopra la base *AB* la retta *ED*, se viene al di dentro, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *ED* uguale al quadrato *EB*; ma se passa per di fuori, il rettangolo *ADB* col quadrato *EB* sarà uguale al quadrato *ED*; imperocchè tirata la perpendicolare *EC* sopra la base *AB*, che la divide pel mezzo, nel primo caso il rettangolo *ADB* col quadrato *DC* uguaglia il quadrato *CB*, ed aggiunto di quà, e di là il quadrato *EC*, sarà il rettangolo *ADB* col quadrato *DC*, e col quadrato *EC* (cioè *ADB*, col quadrato *ED*, che uguaglia i due quadrati *DC*, ed *EC*) uguale al quadrato *CB* col quadrato *CE*, cioè al quadrato *EB* uguale ad essi; e similmente nel secondo caso, essendo il rettangolo *ADB* col quadrato *BC* uguale al quadrato *CD*, aggiunto il quadrato della perpendicolare *EC*, sarà *ADB* col quadrato *EB* (uguale alli due *BC*, ed *EC*) uguale a' quadrati *CD*, ed *EC*, cioè al quadrato *ED*. FIG. 91.

VI.

FIG. 92. VI. Due rette *AB*, *GF*, che si segano in *D* dentro a un cerchio, averanno uguali i rettangoli delle loro parti *ADB*, *FDG*; imperocchè congiunti i raggi *CA*, *CB*, e *CF*, *CG*, e tirata dal centro la retta *CD*, ne' triangoli Isosceli *ACB*, ed *FCG* tanto il rettangolo *ADB* col quadrato *CD* uguaglia il quadrato del raggio *CB*, quanto il rettangolo *FDG* col quadrato *CD* uguaglia il quadrato dell' altro raggio *CG*; ma tali quadrati de' raggi sono uguali, dunque ancora i rettangoli *ADB*, *FDG* sono uguali, mentre con lo stesso quadrato *CD* si uguagliano al quadrato del raggio; e se pure due rette *AD*, *FD* convengono fuori del cerchio in *D*, saranno parimente uguali i rettangoli *ADG*, *FDB*; perchè congiunta la *CD*, tanto sarà *ADG* col quadrato del raggio *CG* uguale al quadrato *CD*, quanto ancora il rettangolo *FDB* col quadrato del raggio *CB* sarà uguale allo stesso quadrato *CD*.

VII. Se dallo stesso punto *D* fuori del cerchio è condotta la tangente *DH*, e qualunque segante *DA*, sarà il quadrato della tangente uguale al rettangolo della segante *AD*, e della esterna parte *DG*; perchè congiunto il raggio *CH*, sarà il quadrato *CD* uguale al quadrato *DH* col quadrato del raggio *CH*; ma era ancora dimostrato uguale il quadrato *CD* al rettangolo *ADG* col quadrato del raggio *CG*; dunque esso quadrato della tangente *DH* è uguale al rettangolo *ADG*, o a quello di qualunque altra segante *FDB*.

VIII. Vicendevolmente, se due rette *AB*, *FG* si segano in *D*, in maniera, che il rettangolo *ADB* uguagli il rettangolo *FDG*, dovrà passare

un

un cerchio per li quattro punti *A*, *G*, *B*, *F*; ed ancora se due rette *AD*, *FD* siano segate in *G*. e *B* in maniera, che li rettangoli *ADG*, *FDB* siano uguali, parimente passerà il cerchio per detti punti; perchè se passasse per tre soli di essi, e non pel quarto, ma segasse una di tali linee in un altro punto, sarebbe il rettangolo primo uguale ad un altro maggiore, o minore del secondo; come se passasse per li punti *A*, *G*, *F*, *E*, e non per *B*, sarebbe *FDG* uguale ad *ADE*, ed *ADG* uguale ad *FDE*, onde sarebbe *ADB* uguale ad *ADE*, ed *FDB* uguale ad *FDE*. Il che è assurdo.

IX. Nel semicerchio *AEB* qualunque rettangolo *BDA* de' segmenti del diametro *AB* diviso in *D*, sarà uguale al quadrato della perpendicolare *DE*; perchè congiunto il raggio *CE*, essendo li due quadrati *ED*, *CD* uguali al quadrato *CE*, o al quadrato *CA*, o al rettangolo *BDA* col quadrato *CD*, tolto esso quadrato *CD*, resta il quadrato *ED* uguale al rettangolo *BDA*. FIG. 93.

X. Onde a qualsivoglia figura rettilinea *H* può trovarsi il quadrato uguale, potendo farsi un parallelogrammo rettangolo uguale ad essa (a), il quale sia *GBDF*, e prolungato il lato *BD* in *A*, posto *DA* uguale a *DF*, sopra il diametro *BA* fatto un semicircolo, ed eretta la perpendicolare *DE*, sarà il quadrato *DE* uguale al rettangolo *BDA*, che è lo stesso di *BDFG*, e però uguale al dato rettilineo *H*.

(a) Corol. 2. Prop. 13.

XI. Nel medesimo semicircolo *AEB* congiunte le corde *AE*, *BE*, il quadrato *AE* sarà uguale al rettangolo *BAD*, ed il quadrato *BE* ugua-

le

le al rettangolo *ABD*, essendo l' angolo *AEB* retto, e però li due quadrati *AE*, *BE* uguali al quadrato del diametro *AB*.

FIG. 94. XII. Può dividersi la retta *AB* in *C*, in maniera, che il rettangolo *ABC* sia uguale al quadrato della parte rimanente *AC*; perchè descritto il quadrato *ABID*, e divisa per mezzo *AD* in *E*, e congiunta la *BE*, si prolunghi *EA* in *F*, posta *EF* uguale ad *EB*, indi descrivasi il quadrato di *FA*, cioè *AFGC*, sarà la *AB* segata in *C* nella detta ragione; perchè prolungata *GC* in *H*, essendo il rettangolo *DFA* col quadrato *EA*, uguale al quadrato *EF*, cioè al quadrato *EB*, che è lo stesso co' quadrati di *AE*, e di *AB*; dunque tolto il quadrato *AE*, rimane il rettangolo *DFA*, cioè *DFGH*, uguale al quadrato *ABID*, e tolto il rettangolo *ACHD*, sarà il quadrato *ACGF* uguale al rettangolo *IBCH*, che è lo stesso del rettangolo *ABC* uguale al quadrato *AC*.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 95. *La retta* AB *divisa per mezzo in* C, *ed altrove in* D *fuori, o in* d *al di dentro, saranno li quadrati* AD, e DB *il doppio del quadrato* CD, *e del quadrato* AC; *ed altresì li due quadrati* Ad, e dB *sono il doppio del quadrato* Cd, *e del quadrato* AC.

IMperocchè alzata dal punto *C* la *CE* uguale a *CB*, ed alla *AB* perpendicolare, congiunte le rette *AE*, *BE*, e dal punto *D* sopra la *EB* condotta *DF* (o dal punto *d* la *df*) parallela ad

ad EC, e tirata FG (ovvero fg) parallela a CB, e congiunta la retta AF (ovvero Af), farà il quadrato EF doppio del quadrato FG (ed Ef doppio del quadrato fg) cioè del quadrato CD (ovvero Cd) essendo nel triangolo rettangolo ECB i lati CE, CB uguali, onde l' angolo CEB è femiretto; ed essendo retto EGF (o Egf), come è retto ECB, farà pure femiretto GFE (o gfE), onde il lato GF è uguale ad EG (ed Eg a gf), però il quadrato EF è doppio di GF, cioè dell' uguale parallela CD (ed il quadrato Ef doppio di gf, cioè dell' uguale Cd). Parimente il quadrato AE è doppio del quadrato AC, essendo AC uguale a CE; dunque li due quadrati EF, AE sono il doppio de' quadrati CD, ed AC (e li quadrati Ef, AE il doppio de' quadrati Cd, ed AC) i quali sono uguali al quadrato AF (ovvero Af) ma questo pure è uguale al quadrato AD, ed al quadrato DF uguale a DB (o al quadrato Ad, ed al quadrato df, uguale a dB) dunque il quadrato AD, col quadrato DB uguaglia il doppio de' quadrati AC, e CD (ed il quadrato Ad col quadrato dB uguaglia il doppio de' quadrati AC, e Cd) dunque è vero il proposto, il quale può esporsi ancora in questo modo, che il quadrato della somma, e della differenza di due rette AC, e CD (o AC, e Cd) delle quali la somma è AD, la differenza BD (o quella Ad, questa Bd) essendo posto CB uguale ad AC, è uguale al doppio quadrato di esse linee date AC, e CD (o AC, e Cd). Il che &c.

Co-

COROLLARJ.

FIG. 96. I. Se due linee AB, EF dentro a un cerchio s' interfeghino in D ad angolo retto, li quadrati de' fegmenti AD, BD, ED, FD faranno il quadruplo del quadrato del raggio CA, e confeguentemente uguali al quadrato del diametro; perchè tirate fopra di effe dal centro le perpendicolari CH, CG, che le dividono pel mezzo, e faranno parallele ad effe rette FE, AB; effendo il quadrato AD col quadrato DB (quello la fomma delle parti AH, HD, e quefto la differenza di effe) doppio de' quadrati AH, ed HD; ed ancora li quadrati ED, DF il doppio de' quadrati EG, GD, congiunti i raggi CA, CE, che hanno i loro quadrati uguali a' quadrati di AH, ed HC (cioè GD) e di EG, e GC (cioè HD), faranno effi quadrati AD, DB, ED, DF dupli de' due quadrati AC, CE (giacchè quefti fi fono veduti uguali a' quadrati AH, HD, EG, e GD) e però quadrupli del quadrato di un raggio, onde uguagliano il quadrato del diametro.

FIG. 97. II. Lo fteffo avviene, fe effe linee fi congiungano in D fuori del cerchio ad angolo retto, effendo pure ivi li quadrati AD, e DB dupli de' quadrati AH, ed HD, e li quadrati ED, DF dupli de' quadrati EG, GD, e però dupli d' ambi i quadrati AC, CE, onde effi quadrati AD, DB, ED, DF quadrupli del quadrato d' un raggio.

FIG. 98. III. Quindi ancora fi ha, che condotte le rette AF, BE, ed AE, BF, li quadrati delle due pri-

prime sono uguali a' quadrati delle due seconde, ed uguali tanto quelli, che questi al quadrato del diametro, essendo essi uguali alli quadrati *AD*, *DB*, *ED*, *DF*, presi insieme.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 59.

Il quadrato della somma delle due rette DC, *e* CA *è uguale a quattro rettangoli* DCA, *col quadrato della differenza di esse linee, cioè di* BD, *posta* CB *uguale a* CA.

IMperocchè fatto il quadrato *ADNQ* della somma *DA* e tiratovi il diametro *AN*, e condotte le *CP*, *BO* parallele a' lati, che segheranno il diametro in *F*, *I*, d' onde si tirino parallele agli altri lati *EFGH*, *KMIL*, è chiaro, che essendo *AC* uguale a *CB*, ed essendo quadrati *ACFE*, *GFMI*, *ABIK*, *LION*, sarà il rettangolo *DCFH* lo stesso che *DCA*, uguale a *QEFP*, ed a *PFGO*, ed a *LHFM*, che sarebbe lo stesso con *HLIG*, ed *ACFE* (che è uguale al quadrato *GFMI*, essendo *AC* uguale a *GF*) dunque tutto lo spazio *ADLIOQ* è uguale a quattro rettangoli *DCA*, che sono *DCFH*, *QEFP*, *PFGO*, ed *HLIG* con *ACFE*; però aggiuntovi *LION*, che è il quadrato di *ON*, cioè di *BD*, differenza di *DC*, e *CA*, ne segue che il quadrato della somma *DC*, e *CB*, cioè di *CA*, che è *ADNQ*, è uguale a quattro rettangoli d' ambidue le rette *DC*, e *CA*, col quadrato della loro differenza *BD*. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Quindi il quadrato della differenza *BD* è uguale al quadrato della somma *DA*, toltine quattro rettangoli della retta *DC* nell' altra *CA*.

II. Onde presi due numeri, per esempio 7, e 2 la cui somma è 9. e la differenza è 5. sarà il quadrato di 9 uguale a' 4 prodotti di 7 in 2 col quadrato di 5, cioè sarà 81 uguale a 4 via 14, che sono 56, con 25.

III. E viceversa il quadrato della differenza de' medesimi numeri, cioè di 5, che è 25, è uguale al quadrato della somma di 7, e 2, cioè di 9, che è 81, detratto il quadruplo di 7 via 2, cioè detratti 56.

PROPOSIZIONE XXII.

FIG. 100. *Da' termini* D, C *del triangolo* ADC *condotte a' lati opposti le perpendicolari* DE, CB, *se gli angoli* D, *e* C *sono acuti, il quadrato della base* DC *sarà uguale a' rettangoli* ADB, ACE; *ma se uno degli angoli, per esempio* C, *è ottuso, il quadrato* DC *sarà uguale all' eccesso del rettangolo* ADB *sopra l' altro* ACE.

FIG. 101. Convengano esse perpendicolari *DE*, *CB* in *G*, congiunta la *AG*, conveniente con la base *DC* in *F*, ancora questa gli sarà perpendicolare; imperocchè essendo retti gli angoli *DBC*, *DEC*, dovrà passare un cerchio per gli quattro punti *D*, *B*, *C*, *E*; ed essendo ancora retti gli angoli *ABG*, *AEG*, passerà un cerchio per gli quattro punti *A*, *B*, *E*, *G* (a); dunque congiunta *BE*, l' angolo *AEB*

(a) Corol. 1. e 4. della Prop. 14.

AEB farà uguale a *BDC*, fecondo il cerchio, che foſſe condotto per li punti *D*, *B*, *C*, *E*; ed ancora l' angolo *AEB* farà uguale ad *AGB* pel circolo, che paſſa per li punti *A*, *B*, *E*, *G*; dunque *AGB* farà pure uguale all' angolo *BDC*, o *BDF*; onde nella prima figura li due angoli *BDF*, *BGF* fono uguali a due retti, eſſendo uguali ad *AGB*, e *BGF*; e nella feconda figura eſſendo uguali *BDF*, *BGF*, dovrà paſſare un cerchio per li quattro punti *B*, *D*, *G*, *F*; onde eſſendo *DBG* angolo retto, ancora l' oppoſto *DFG* nella prima figura farà retto, ed ancora nella feconda, eſſendo nel medeſimo femicircolo tanto *DBG*, che *DFG*; ficchè la *AG* riefce in *F* perpendicolare alla bafe; onde ancora faranno retti gli angoli *ABC*, ed *AFC*, onde paſſerà un cerchio per li quattro punti *A*, *B*, *F*, *C*, ed ancora per li quattro *A*, *D*, *F*, *E*; dunque il rettangolo *ADB* farà uguale ad *FDC*, ed il rettangolo *ACE* farà uguale a *DCF*; ma nella prima figura li due rettangoli *FDC*, e *DCF* fono uguali al quadrato *DC*; dunque ivi il quadrato *DC* è uguale alli due rettangoli *ADB*, ed *ACE*: Nella feconda figura poi eſſendo il quadrato *DC* uguale ad *FDC*, manco *DCF*, farà eſſo quadrato uguale al rettangolo *ADB*, detrattone l' altro *ACE*. Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARJ.

I. Ancora in queſt' altra figura eſſendo l' angolo ottuſo *DAC* oppoſto alla baſe *DC*, le perpendicolari *DE*, *CB* cadono fopra i lati prolungati al di fuori, e convengono in *G* al di fo- FIG. 102.

dra del vertice A, e congiunta la AG parimente concorre con la base DC in F ad angoli retti; perchè congiunta EB, passando un cerchio per li punti $A, E, G\ B$, e per li punti D, E, B, C, l'angolo CBE è uguale ad EDC, o diciamo EDF, ed ancora GAE è uguale a GBE; onde GAE, ed EDF essendo uguali, EAF, ed EDF sono uguali a due retti, onde passa un cerchio per li punti D, E, A, F, sicchè essendo retto AED, ancora AFD è retto; ed il quadrato della base DC sarà pure uguale a' rettangoli ADB, ed ACE, essendo ADB uguale a CDF, ad ACE uguale a DFC; onde essendo il quadrato DC uguale agli rettangoli CDF, e DCF, è pure uguale alli rettangoli ADB, ed ACE.

II. Anzi essendo ancora in questa figura, e nella prima, e seconda, il rettangolo CDF uguale al rettangolo GDE, e l'altro DCF uguale a GCB, sarà pure ADB con ACE uguale agli altri due GDE, GCB; ed essendo il quadrato DC uguale alla somma de' rettangoli ADB, ACE, quando gli angoli D, C sono acuti, ma se un angolo C è ottuso essendo il quadrato DC uguale all'eccesso di ADB sopra ACE, sarà ancora nel primo caso il quadrato DC uguale alla somma de' rettangoli GDE, GCB, e nel secondo caso uguale alla loro differenza, cioe all' eccesso di GDE sopra GCB.

III. E' manifesto poi, che le tre perpendicolari, condotte dagli angoli di qualunque triangolo a' lati opposti, convengono in un medesimo punto G; e dove convengono due di esse, congiunto l' altro angolo col punto di detto concorso, que-

questa linea pure è perpendicolare all' altro lato opposto.

IV. Quando l' angolo A è retto, ciascun lato è da se stesso perpendicolare all' altro, convenendo nel punto A, ed il quadrato della base DC allora è uguale a' quadrati de' lati, che sono i rettangoli ADA, ACA, essendo tanto il punto E, che il punto B (ed ancora il punto G) nel medesimo punto A. FIG. 103.

V. Essendo l' angolo A acuto, il quadrato DC uguaglia i quadrati de' lati AD, AC, detratti i due rettangoli DAB, CAE, ovvero detratto il duplo di uno di essi, perchè l'uno all' altro è uguale, o pure detratto il duplo del rettangolo FAG, che uguaglia parimente gli stessi DAB, CAE; imperocchè li quadrati AD, ed AC sono uguali, quello a' rettangoli ADB, DAB, questo a' rettangoli ACE, CAE; dunque essendo il quadrato DC uguale agli rettangoli ADB, ACE, sarà uguale a' quadrati AD, ed AC, detratti i rettangoli DAB, CAE, che sono il doppio di ciascuno di essi, e di FAG. FIG. 104.

VI. Ma se l' angolo DAC è ottuso, il quadrato DC uguaglierà non solo i quadrati AD, AC, ma di più li rettangoli DAB, CAE, o dicasi il doppio di ciascuno di essi, essendo uguali, o ancora può dirsi il doppio di GAF, che pure è uguale a ciascuno degli altri. Imperocchè essendo esso quadrato uguale a' rettangoli ADB, ed ACE, il primo de' quali importa il quadrato AD col rettangolo DAB, ed il secondo è uguale al quadrato AC col rettangolo CAE, è chiaro, che il quadrato DC eccede li quadrati AD, AC con li detti rettangoli. FIG. 105.

VII.

FIG. 106. VII. Nel triangolo Acuziangolo *ADC* condotte dagli angoli a' lati oppofti le perpendicolari *DE*, *CB*, *AF*, che convengono in *G*, li quadrati de' lati *AD*, *DC*, ed *AC* fono uguali al doppio de' rettangoli *EDG*, *BCG*, *FAG*; imperocchè fi è dimoftrato effere il quadrato *DC* uguale alli rettangoli *EDG*, *BCG*; ed il quadrato *AC* fimilmente è uguale a' rettangoli *BCG*, *FAG*; ed il quadrato *AD* ugnale a' rettangoli *FAG*, *EDG*; dunque i quadrati di tutti li tre lati uguagliano il doppio di detti rettangoli, che fono ivi due volte nominati.

VIII. Quindi in effo triangolo due quadrati *AD*, ed *AC* uguagliano *BCG*, *EDG*, col doppio del rettangolo *FAG*; onde effi quadrati *AD*, *AC* uguagliano il quadrato *DC* (che è uguale alli due rettangoli *BCG*, *EDG*) col doppio rettangolo *FAG*.

IX. Onde fe riefce *AF* divifa in *G* per mezzo, effendo il quadrato *AF* doppio del rettangolo *FAG*, faranno li due quadrati *AD*, *AC* uguali al quadrato *DC* col quadrato della perpendicolare *AF*.

FIG. 107. X. Però fe vi farà un triangolo rettangolo *CAH*, condotta la perpendicolare *AF* fopra la bafe, e divifa la parte *HF* per mezzo in *D*, congiunta *DA*, farà fatto il triangolo *DAC* tale, che averà li quadrati de' lati *AC*, *AD* uguali al quadrato della bafe *DC*, e della perpendicolare *AF*; imperocchè condotta la *DE* perpendicolare al lato *AC* dividerà per mezzo la perpendicolare *AF* in *G*, effendo ancora l' angolo *HAC* retto, e però *DGE* parallela ad *AH*; e fic-

ſiccome nel triangolo *HAF* la *DG* divide *HF* per mezzo in *D*, così dividerà per mezzo *AF* in *G*.

PROPOSIZIONE XXIII.

In qualunque triangolo ABC *condotta la retta* BD *dal vertice* B *in* D *alla metà della baſe* AC, *ſaranno li quadrati de' lati* BA, BC *uguali al doppio del quadrato della retta* BD, *ed al doppio del quadrato della metà della baſe* AD, *ovvero* DC. TAV. VII. FIG. 108

SE il triangolo è equicrure, la retta *BD* ſarà perpendicolare alla baſe, onde eſſendo *AB* quadrato uguale a' quadrati *AD*, *BD*, ed il quadrato *BC* uguale a' quadrati *CD*, *BD*, è manifeſto, che li due quadrati *AB*, e *BC* uguagliano il doppio de' quadrati *BD*, ed *AD*.

Ma ſe non ſono que' lati uguali, la *BD* ſegherà obliquamente la baſe *AC*, e condottevi le perpendicolari *AF*, *CE*, eſſendo ne' triangoli *ADF*, *CDE* gli angoli del primo uguali agli angoli del ſecondo, e la *CE* parallela ad *AF*, ed il lato *AD* uguale al lato *DC*, ſaranno pure gli altri lati loro uguali, cioè *DF* uguale a *DE*; però il rettangolo *BDE* uguaglierà il rettangolo *BDF*; onde eſſendo il quadrato *AB* uguale a' quadrati *AD*, *BD* con due rettangoli *BDF*; ed il quadrato *BC* uguale a' quadrati *CD*, e *BD*, detratti due rettangoli *BDE*, quindi ſono li due quadrati *AB*, e *CB* ſolamente uguali a' due quadrati della *BD*, ed a' due quadrati della mezza

base AD, che sono gli ambidue uguali AD, e CD; giacchè li due retti angoli BDE uguagliano gli altri due BDF, onde quelli aggiunti, e questi sottratti, nulla di più, nè di meno importano alli due quadrati AB, e BC, se non il doppio quadrato BD, ed il doppio quadrato AD. Il che era da dimostrarsi.

COROLLARJ.

FIG. 109. I. Quindi in ogni parallelogrammo $ABCE$ li quadrati de' diametri AC, BE uguagliano i quadrati de' lati AB, BC, CE, ed EA; imperocchè essendo AB, BC uguali al doppio de' quadrati BD, ed AD, e li quadrati CE, ed EA uguali al doppio de' quadrati ED, ed AD, essendo ED uguale a BD (perchè li diametri si dividono per mezzo in D, essendo i triangoli ADE, BDC con ciascun angolo dell'uno uguale al corrispondente dell'altro, ed il lato AE uguale a BC, e però gli altri lati uguali, BD a DE, ed AD a DC) saranno li quadrati de' lati AB, BC, CE, EA uguali al quadruplo del quadrato BD (che è il quadrato di BE) con il quadruplo del quadrato AD (che è il quadrato AC) dunque li quadrati de' lati uguagliano quelli de' diametri.

FIG. 110. II. Onde se due parallelogrammi $ABCE$, ed $FGIH$ hanno i medesimi lati, ma con diversi angoli composti, li diametri dell'uno essendo disuguali a' diametri dell' altro, saranno però i quadrati de' diametri di quello uguali a' quadrati de' diametri di questo, essendo uguali tanto gli uni, che gli altri a' quadrati de' lati del suo rettangolo, i quali suppongansi rimasi uguali.

III.

III. Similmente, se li diametri AC, BE d'un parallelogrammo sono uguali a' diametri GH, FI di un altro, benchè variamente inclinati tra di se questi, che quelli; saranno pure li quadrati de' lati del primo uguali a' quadrati de' lati del secondo parallelogrammo, benchè riescano disuguali questi lati a quelli.

IV. Nel diametro GF d' un cerchio presi due punti A, B (dentro, o fuori del circolo) ugualmente distanti dal centro C, condotte a qualunque punto D della periferìa le rette AD, BD, ed a qualsivoglia altro punto E le rette AE, BE, saranno i quadrati di quelle uguali a' quadrati di queste; imperocchè congiunti i raggi CD, CE, tanto sono li quadrati AD, e DB uguali al doppio de' quadrati AC, DC, quanto li quadrati AE, BE sono parimente uguali al doppio de' quadrati AC, EC; onde sono gli stessi. FIG. 111

V. Similmente, se da qualunque punto D, dentro, o fuori del cerchio si conducano a' termini di qualunque diametro GF, ed AB, le rette DG, DF, e DA, DB, li quadrati delle prime saranno uguali a' quadrati delle seconde, perchè condotta al centro la retta DC, tanto li quadrati DG, e DF sono il doppio del quadrato DC, e del quadrato del raggio CG, quanto li quadrati DA, e DB sono pure il doppio del quadrato DC, e del quadrato del raggio CA; il che è il medesimo di quello. FIG. 112.

VI. In ogni triangolo ABC condotti da qualunque angolo gli assi AE, BD, CF, che segano per mezzo gli opposti lati BC, AC, AB, saranno li quadrati di questi lati agli quadrati de' sud- FIG. 113.

detti assi, come 4 a 3; perchè essendo li quadrati AB, e BC il doppio del quadrato BD, e del quadrato AD; e li quadrati AB, ed AC il doppio de' quadrati AE, CE; e li quadrati AC, BC il doppio de' quadrati CF, AF; dunque li due quadrati AB, e li due AC, e li due BC sono uguali al doppio de' quadrati BD, AE, CF, con li due quarti, cioè la metà de' quadrati AC, BC, AB; e però (dividendo l'una, e l'altra parte per mezzo) li soli quadrati AB, AC, BC uguagliano li quadrati BD, AE, CF, con un quarto de' quadrati AB, AC, BC; e tolto di quà, e di là questo quarto, rimangono $\frac{3}{4}$ de' quadrati AB, AC, BC uguali a' quadrati BD, AE, CF; onde 3 quadrati de' lati sono uguali a 4 quadrati degli assi; e però li quadrati AB, AC, BC a' quadrati BD, AE, CF, sono come 4 a 3.

AVVERTIMENTO.

Si proverebbe ancora, essere li quadrati de' lati AB, AC, BC uguali al triplo de' quadrati di AG, BG, e CG, ed al duodecimo de' quadrati GD, GE, GF; ma ciò potrà ricavarsi dopo aver intese le proprietà delle Proporzioni, di cui parleremo nella seguente seconda parte; ed osservando, ne raccoglieranno li bravi Studenti, che li quadrati delle intere AE, BD, CF sono alli quadrati delle loro due terze parti AG, BG, CG, come 9. a 4. ed a' quadrati delle loro terze parti GE, GD, GF, come 9. ad 1. onde paragonando questi quadrati ordinatamente, o perturbatamente co' quadrati de' lati AB, AC, BC, ne seguirà il proposto.

INSTITUZIONI GEOMETRICHE

PARTE SECONDA.

DEFINIZIONI.

I. DIconsi *Omogenee* quelle grandezze, che moltiplicandosi riescono una maggiore dell' altra.

II. *Proporzione* dicesi la scambievole relazione della quantità di una grandezza con quella d' un altra omogenea ad essa, che ancora dicesi *Ragione*.

III. *Proporzionalità* dicesi la similitudine delle proporzioni tra varie quantità; in maniera tale però, che se si attende solamente la differenza tra due grandezze, uguale alla differenza di due altre, dicesi *Proporzionalità aritmetica*; ma se nel medesimo modo una grandezza contiene un altra, o in essa si contiene, come qualche altra grandezza contiene, o è contenuta in un altra, si dice *Proporzionalità Geometrica*;

SCOLIO I.

I. N*Ella proporzionalità aritmetica bisogna, che tutti i termini siano omogenei, acciò abbiano una uguale differenza l' uno dall' altro. Per esempio, sono aritmeticamente proporzionali i numeri*

ri 7 e 5. 12. e 10. perchè le loro differenze so-
FIG. 114. *no 2: ed ancora le linee* AB, AC, ed ED, DF *sono aritmeticamente proporzionali, quando la differenza* BC *delle due prime uguagli la differenza* FE *delle seconde.*

FIG. 115. II. *Ma nella proporzionalità geometrica basta, che siano due termini omogenei, ed altri due termini di materia diversa, solamente omogenei tra loro, non con gli altri due. Per esempio, essendo il triangolo* ABC *al triangolo* BCD, *ed ancora la linea* E *alla linea* F, *come* 3 *a* 5; *diconsi questi termini Geometricamente proporzionali. E lo stesso potrebbero essere due pesi, due velocità, due tempi, due angoli &c. nella stessa proporzione, riferendosi il primo di tali termini al secondo suo omogeneo nella stessa relazione.*

DEFINIZIONI.

IV. LE grandezze, che hanno una simile proporzione, cioè la stessa proporzionalità, o sia aritmetica, o geometrica, diconsi quantità *Proporzionali*.

V. Di esse quantità proporzionali si dicono *Antecedenti* la prima, e la terza (e se più fossero, ancora la quinta, e la settima &c.) e diconsi *Conseguenti* la seconda, e la quarta, (e se altre vi sono, ancora la sesta, e l' ottava &c) e diconsi ancora *Omologj* tanto i termini antecedenti tra loro, quanto ancora tra loro i Conseguenti.

VI. L'antecedente poscia col suo conseguente, diconsi termini *Analogi* per la proporzione, che tra loro hanno, che pure chiamasi *Analogia*.

VII.

VII. Se due quantità omologe ad un' altra ſono diſuguali, la maggiore preſa per antecedente averà *maggior ragione*, che la minore al medeſimo conſeguente; ma paragonandoſi un ſolo antecedente a due conſeguenti diſuguali, diraſſi maggiore la ragione di eſſo antecedente al minore, che al maggiore.

SCOLIO II.

I. *Siccome è chiaro, che eſſendo li due termini omogenei* A, *e* B *diſuguali, il primo maggiore, il ſecondo minore, rieſce maggiore la proporzione del primo* A *al terzo* C, *che quella del ſecondo* B *al medeſimo* C, *così è chiaro, che avendo* B *ad un altro quarto* D *la ſteſſa proporzione, che* A *a* C, *averà* B *a* D *maggior ragione, che* B *a* C; *ed è* D *minore di* C, *come* B *è minore di* A, *per eſſere proporzionali* A, *e* C, *come* B a D; *dunque lo ſteſſo antecedente ha maggior ragione al minore de' conſeguenti, che al maggiore di eſſi.* FIG. 116.

II. *Quando ſia maggiore la proporzione di* A *a* B, *che di* C a D, convertendo, *cioè pigliati i conſeguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conſeguenti, ſarà minore la proporzione di* B *ad* A, *che quella di* D a C; *imperocchè, ſe aveſſe* E *a* B *la ſteſſa proporzione, che* C *a* D, *eſſendo maggiore la ragione di* A *a* B, *che di* E *a* B, *ſarebbe* A *maggiore di* E, *dunque averà maggior ragione* B *ad* E, *che* B *ad* A; *ma* B *ad* E *ſarà, come* D *a* C, *dunque è maggiore la ragione di* D *a* C, *che di* B, *ad* A. FIG. 117.

DE-

DEFINIZIONI.

VIII. POste quante si vogliano quantità omogenee, la proporzione della prima all' ultima dicesi *composta* delle proporzioni, che averà la prima alla seconda, e la seconda alla terza, e così di altre intermedie fino all' ultima.

IX. Ma essendo uguali le proporzioni della prima alla seconda, della seconda alla terza, della terza alla quarta &c. si dirà la proporzione della prima alla terza *duplicata* di quella, che è tra la prima, e la seconda; e la proporzione della prima alla quarta *triplicata* di quella stessa della prima alla seconda; e la proporzione della prima alla quinta si direbbe *quadruplicata* della medesima, che è tra la prima, e la seconda, o tra la seconda, e la terza; e così in infinito.

X. Una retta dicesi segata secondo l' *estrema, e media ragione*, quando tutta ad una sua parte sia come questa parte alla rimanente: Come per
Vedi la esempio, essendo *AB* ad *AC*, come *AC* a *CB*,
FIG. 114 dirassi divisa *AB* secondo l' estrema, e media proporzione.

SCOLIO III.

I. T*Ra due termini primo, ed ultimo possono interporsi altri omogenei, maggiori, o minori di ciascuno di essi, e così la proporzione di quelli due dicesi composta delle proporzioni intermedie; cioè tra le due linee* A, *e* D *interposte le*
FIG. 118. *linee* B, C *una maggiore, l'altra minore, si dirà la ragione di* A *a* D *composta delle proporzioni* A *a* B, *e* B *a* C, *e* C *a* D. *Così pure tra due nu-*

numeri 4, 9, preſi altri numeri 6, e 3, ſi dice la proporzione di 4 a 9 compoſta di queſte intermedie di 4 a 6, di 6 a 3, e di 3 a 9; anzi preſi quali ſi voglia altri numeri, 44, 25, 100, tanto ſi direbbe compoſta la ragione di 4 a 9, delle ragioni di 4 a 44, di 14 a 25, di 25 a 100, e di 100. a 9; ed eſſendo pure altre proporzioni diſgiunte, tra varj altri generi, per eſempio la proporzione delle linee A, B eſſendo uguale alla proporzione delle ſuperficie EF, e la proporzione di B a C eſſendo uguale alla ragione degli angoli GH, e la proporzione C, D uguale a quella de' Solidi I, K tanto diraſſi, eſſere la proporzione di A a B compoſta delle proporzioni di E ad F, e di G ad H, e di I a K, eſſendo queſte uguali all' altre ſuddette intermedie.

II. Ma eſſendo uguali le proporzioni tra i ter- FIG. 119.
mini A, B, C, D omogenei, diraſſi quella proporzionalità continua compoſta di ragioni uguali; e però la prima alla terza, cioè A a C ſi dirà proporzione duplicata della ragione ſemplice tra A, e B, ovvero tra B, e C; e la ragione della prima alla quarta ſi dirà proporzione triplicata di quella, che è ſemplicemente tra A, e B, ovvero tra B, e C, o pure tra C, e D, per eſſere la ſuddetta ragione di A, e C compoſta di due proporzioni uguali a quella di A a B, e quell' altra di A a D compoſta di 3 ſimili proporzioni; e così procedendo ad un altro termine proporzionale, ſarà la proporzione del primo al quinto quadrupla di qualunque delle intermedie tra loro uguali: Così poſti i numeri 3, 6, 12, 24, 48, la ragione di 3 a 48. ſi dirà quadrupla di quel-

la

la, che è tra 'l primo, e 'l secondo, o tra 'l secondo, e 'l terzo &c. per essere composta di quelle quattro ragioni tra loro uguali: E così degli altri.

III. *Siccome una retta può dividersi secondo l' estrema, e media ragione, quando sia tutta ad una parte, come questa stessa alla rimanente, così ancora nelle superficie, ne' corpi, negli angoli, ed in altri termini potrà farsi lo stesso; ma non già in qualche numero potrebbe ciò farsi, perchè quelle parti, in cui dividesi una quantità secondo l' estrema, e media ragione, non possono essere* commensurabili *tra di se, o con l' intera quantità medesima; anzi sono sempre* incommensurabili, *e però non possono essere parti numerose di qualche numero, ma solamente radici incommensurabili, che devono essere, tanto il numero intero alla sua parte maggiore, quanto questa maggiore alla residua minore in ragione della radice di cinque manco uno, a tre, manco la radice di cinque, come preso il numero* 100: *converrebbe prenderne la maggior parte uguale a* $50\sqrt{5}$, *meno* 50; *e la minore uguale a* 150, *manco* $50\sqrt{5}$.

IV. *Generalmente per esprimere con brevissimo calcolo le grandezze proporzionali, si rappresenteranno con linee, tanto le quantità superficiali, quanto i corpi, o gli angoli, o i pesi, o le forze, o i tempi, o le velocità &c. che si vogliano paragonare; ma più semplicemente si esprimeranno con lettere Alfabetiche, o grandi* A, B, C, D &c. *o piccole* a, b, c, d, &c. *delle quali le prime esprimeranno le quantità date, e già note, ma le ultime* x, y, z *esporranno quelle ignote, che*

si

si ricercano; e per esprimere la somma di più parti, vi s' interporrà la croce +, *e per esprimerne la differenza, vi si metterà la lineetta* —; *come per esempio* A + B — C, *espone la somma di* A, *e di* B, *detrattone* C; *e così* b + x + y — c, *importa la somma della data* b, *e delle ignote* x, *e* y *detratta l' altra nota* c; *e così il segno* + *significa* piu, *e l' altro* — *significa* meno; *sicchè* A — B + E *spiegasi con dire* A manco B più aggiuntovi E *&c.*

V. *La moltiplicazione di una quantità in un altra si espone congiungendo assieme quelle lettere, che le esprimono; e la divisione si esprime con fare una frazione, in cui una linea separa il dividendo al di sopra, ed il divisore al di sotto: Per esempio* A B, *ovvero* c x, *espongono il prodotto di* A *in* B, *o pure di* c *in* x; *e se fossero più lettere unite insieme*, ACD, *e* b a x *&c. si esprimerà il prodotto di* A *in* C, *ed in* D, *ed ancora il prodotto di* e *in* b, *in* a, *in* x; *onde il quadrato di una lettera, cioè di* A *in* A *si scriverebbe* A A, *ed il cubo di essa* A A A; *nel che basterebbe scrivere* A^2 *in vece di* AA, *ed* A^3 *in luogo di* AAA; *ma volendo dividere* ACD *per* BE, *si scriverà* $\frac{ACD}{BE}$, *e così ancora dividendo* A^3 *per* BC, *si scrive* $\frac{A^3}{BC}$; *e parimente* $\frac{ab}{c}$ *esprime* a b *diviso per* c, *ed* $\frac{a^2 b^3}{cx}$ *espone la divisione del prodotto fatto dal quadrato* a, *e dal cubo* b *per il prodotto di* c *in* x.

VI. *L' ugualità poi si esprimerà col segno* =, *cioè*

cioè $AB = CE$, *è il prodotto di* A *in* B *uguale al prodotto di* C *in* E; *e similmente* $ab + ce - bx = cf$ *espone, che il prodotto* ab *col prodotto* CE, *detrattone il prodotto* bx *sarà uguale al prodotto* cf. *L' essere poi una quantità maggiore dell'altra si esprime col segno* $>$; *e l' essere minore, col segno* $<$; *come per esempio* $A > B$ *esprimerebbe essere* A *maggiore di* B, *ed* $ex < ac$ *esporrà essere* ex *minore di* ac.

VII. *Il segno della proporzionalità si fa in questa maniera* $A \cdot B :: C \cdot D$ *cioè la proporzione di* A *a* B *è uguale a quella di* C *a* D; *ed ancora in altri esempj*, $ax - ab + c^2 \cdot e^2 :: cx - ce \cdot be$, *espone, che la proporzione di* $ax - ab + c^2$ *sta al quadrato di* e, *come* $cx - ce$ *al prodotto* be: *Ma se una proporzione sarà maggiore, o minore dell' altra, si esprimerà con l' altro segno* $A \cdot D > C \cdot E$, *cioè la proporzione di* A *a* D *è maggiore di quella, che ha* C *ad* E; *o pure essendo*, $ax + ab \cdot cx < eb - c^2 \cdot x^2$, *importerà, che la somma di* ax *con* ab, *al prodotto di* cx *abbia minore proporzione di quella, che ha il prodotto* eb, *detrattone il quadrato di* c, *al quadrato di* x.

VIII. *Potrebbero poscia prendersi per assiomi.*

I. *Che le quantità uguali, paragonate ad una terza, averanno ad essa ugual proporzione.*

II. *E viceversa le quantità, che hanno ugual proporzione ad una terza, o alle quali una medesima ha ugual proporzione, esse quantità saranno uguali.*

III. *Ed ancora se due proporzioni sono uguali ad una terza proporzione, saranno esse pure tra loro uguali.*

IV. *E*

IV. *E se una proporzione è maggiore d'un altra, ed una terza è minore, o uguale a quella seconda, sarà la prima maggiore della terza.*

V. *Alle uguali proporzioni aggiungendo, o sottraendo altre proporzioni uguali, le composte, o residue riusciranno pure uguali.*

PROPOSIZIONE I.

In una aritmetica progressione, che è una continua proporzionalità di termini aritmeticamente crescenti, o decrescenti, con uguale differenza di ciascuno all'altro suo prossimo, il massimo contiene il minimo con tanta moltiplicità di esse differenze, quanti sono essi termini susseguenti al massimo.

SIano i termini continuamente disposti con aritmetica proporzionalità, A, B, C, D, E; essendo A il massimo, ed E il minimo, e la loro continua differenza essendo x, sarà $D = E + x$; e C sarà $= D + x$; onde $= E + 2\ x$; similmente B sarà $= C + x$, e però $= E + 3\ x$; e finalmente $A = B + x$ deve essere $= E + 4x$; dunque il massimo è uguale al minimo con la moltiplicità di tante differenze, quanti sono i susseguenti. Così, per esempio, se la progressione aritmetica fosse di questi numeri 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2. la differenza de' quali $= 3.$, il massimo $20 = 2 + 18$, cioè uguale al minimo con il triplo moltiplicato sei volte (essendo sei li termini susseguenti) ed è 3 via $6 = 18$.

COROLLARJ.

I. Similmente il minimo termine può dirsi uguale al massimo, detrattagli tante volte la differenza, quanti sono i termini avanti al minimo: Per esempio $E = A - 4x$, nel primo esempio addotto, e nel secondo sarà $2 = 20 - 6$ in 3, cioè $20 - 18$.

II. Anzi qualunque intermedio è uguale al massimo, detratta la differenza tante volte, quanto è il numero de' termini da questo a quello; e lo stesso parimente è uguale al minimo con tante differenze, quanti sono i termini susseguenti ad esso. Così $C = A - 2x = E + 4x$; ed il $14 = 20$, meno 2 ternarj, cioè $20 - 6$, ed ancora $= 2 + 4$ via 3, cioè $= 2 + 12$.

PROPOSIZIONE II.

Se quattro grandezze A, B, C, D *sono aritmeticamente proporzionali, la somma dell' estreme* $A + D$ *è uguale alla somma delle medie* $B + C$.

IMperocchè, essendo la loro differenza $= x$, ed A il termine massimo, D il minimo, sarà $C = D + x$; e parimente $A = B + x$; dunque la somma degli estremi $A + D = B + x + D$, e parimente la somma de' medj $B + C = B + D + x$; dunque $A + D = B + C$.

COROLLARJ.

I. Se sono tre grandezze aritmeticamente proporzionali A, B, C, la somma dell' estreme sarà uguale al doppio della media, cioè $A + C = 2B$

$= 2\ B$, essendo in aritmetica proporzionalità $A \cdot B :: B \cdot C$, onde le due medie sono il doppio di B.

II. Nella progressione continua aritmetica di termini proporzionali A, B, C, D, E, F, G, la somma degli estremi $A + G$ sarà uguale alla somma di qualunque due altri ugualmente distanti dagli estremi, cioè $B + F$, ovvero $C + E$; ed essendo il numero di essi dispari, saranno quelle somme ancora uguali al doppio dell' intermedio, cioè $= 2\ D$.

III. Vicendevolmente, se di più termini omogenei sarà la somma degli estremi uguale ad altre somme di due intermedj, bisognerà, che siano essi termini aritmeticamente proporzionali; cioè, se $A + D = B + C$, bisognerà che sia la medesima differenza di A e B, che di C e D, perchè tolti di quà, e di là D, e B, sarà $A - B = C - D$, e però la loro differenza è uguale.

IV. Così in un semicircolo essendo inscritti i due triangoli rettangoli ACB, ADB, per essere il quadrato AC col quadrato CB uguale a' quadrati AD, BD (perchè tanto li due primi, che li due ultimi sono uguali al quadrato del diametro AB) sarà l'eccesso del quadrato BC sopra il quadrato BD uguale all' eccesso del quadrato AD sopra il quadrato AC. FIG. 120.

PROPOSIZIONE III.

Nella continua progressione aritmetica di quanti termini si vogliano, come A, B, C, D, E, F, *ovvero in numeri* 12. 10. 8. 6. 4. 2. *la somma di tutti è uguale alla metà dell' aggregato degli estremi, o*

di altri due ugualmente distanti da essi, moltiplicata nel numero della moltitudine di tutti i termini.

$A \cdot F$	12.	2.
$B \cdot E$	10.	4.
$C \cdot D$	8.	6.
$D \cdot C$	6.	8.
$E \cdot B$	4.	10.
$F \cdot A$	2.	12.

SI rimettano gli stessi termini con ordine inverso, cioè F, E, D, C, B, A; e ne' numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12, composti co' precedenti; per il Coroll. 2 della precedente Proposizione sarà la somma di due qualunque $A + F$, e $B + E$, e $C + D$ &c. tra loro uguali, siccome pure $12 + 2 = 10 + 4 = 8 + 6$ &c. essendo tutti $= 14$; dunque la somma di tutte queste paia sarà l' aggregato degli estremi, o di due qualunque ugualmente distanti da essi, moltiplicato per il numero di essi termini; dunque il prodotto dell' aggregato degli estremi nella moltitudine de' termini proposti uguaglia tutti essi termini posti due volte; però la metà dell' aggregato di detti estremi, o di due da loro ugualmente distanti moltiplicata pel numero della moltitudine di tali termini uguaglia esattamente la somma di essi termini; come può vedersi ne' numeri addotti $12 + 10 + 8 + 6 + 4 + 2$, che sono 6 numeri; ed essendo $12 + 2$, ovvero $10 + 4 = 14$, la cui metà è 7, moltiplicando il 7 per 6, ne proviene 42, e questa è la somma di tutti essi numeri proposti.

COROLLARJ.

I. Se il numero dei termini fosse dispari, come A, B, C, D, E, ovvero 10. 7. 4; essendo

do la somma degli estremi uguale al doppio di quel di mezzo, sarà l' aggregato di tutti i termini uguale al prodotto di quel di mezzo nel numero della loro moltitudine; così 10 + 7 + 4 = · 7 moltiplicato in 3 = 21; e se fossero 20. 17. 14. 11. 8. 5. 2; il numero di mezzo 11 moltiplicato per 7, che è il numero di tanti termini, farà 77, che è l' aggregato di tutti.

II. Ancora col minimo termine, e con la differenza di essi termini, e col numero della loro moltitudine si può ritrovare l' aggregato di essi: Per esempio sia *il minimo* $= a$, e la differenza $= x$, e il numero della moltitudine di essi termini $= n$, sarà l' aggregato di tutti $= na + \frac{\overline{n^2 - n}\, x}{2}$, cioè si moltiplichi il minimo termine pel detto numero, che sarà na, e si moltiplichi la differenza x pel quadrato di detto numero, detrattone esso numero, e diviso questo prodotto per metà, che è $\frac{\overline{n^2 - n}\, x}{2}$; imperocchè essendo a il minimo termine, il massimo sarà $= a + \overline{n - 1}\, x$, dunque la somma di questi due estremi $= 2a + \overline{n - 1}\, x$, che moltiplicata per n, e divisa per mezzo, riesce $\frac{2na + \overline{n^2 - n}\, x}{2} = na + \frac{\overline{n^2 - n}\, x}{2}$, come sopra.

III. Se la serie aritmetica comincia dall' unità, e segue con ciascun numero, il loro aggregato sarà uguale alla somma del quadrato dell' ultimo termine col medesimo termine, divisa per mezzo. Per esempio siano i termini 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. piglisi il quadrato dell' ultimo, che

è 49, ed aggiuntagli la sua radice 7, che diventa 56. (che sarà sempre un numero pari) diviso per mezzo, resta 28; e tale è l' aggregato di tutti que' numeri; Imperocchè essendo il primo numero 1, e l' ultimo uguale al numero della moltitudine di essi, che sia $= n$; la somma di questi estremi moltiplicata pel numero della loro moltitudine, e divisa per mezzo, sarà sempre $= \overline{1 + n}$ in n diviso per mezzo, il che riesce $\frac{n^2 + n}{2}$, e tale però è l' aggregato di essi termini.

IV. Ma se dall' unità si dispongono tutti i numeri dispari, la cui differenza sarà sempre 2, il loro aggregato sempre riuscirà un quadrato, la cui radice è la somma degli due estremi divisa per mezzo; Per esempio sia questa serie 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13., è chiaro, che $1 + 3 = 4$, la cui radice è $\frac{3 + 1}{2} = 2$; ed ancora $1 + 3 + 5 = 9$, la cui radice è $\frac{5 + 1}{2} = 3$; e similmente $1 + 3 + 5 + 7 = 16$, la cui radice è $\frac{7 + 1}{2} = 4$; e così pure aggiuntovi l' altro numero 9, il suo aggregato è 25, la cui radice è $\frac{9 + 1}{2} = 5$; ed annessovi ancora il numero 11. diventa 36, la cui radice è $\frac{11 + 1}{2} = 6$; e parimente compreso il 13. la somma di tutti sarà 49, la cui radice è $\frac{13 + 1}{2} = 7$; e così procedendo, sempre si trova il medesimo.

PROPOSIZIONE IV.

I termini aritmeticamente proporzionali, ancora Convertendo, *ed* alternando *rimangono proporzionali.*

Dicesi *Convertendo*, quando si pigliano i conseguenti per antecedenti, e gli antecedenti per conseguenti; cioè essendo A a B, come C a D, sarà convertendo B ad A, come D a C, rimanendo in essi l' istessa differenza, se non che gli eccessi riescono difetti, o li difetti riescono eccessi.

Dicesi poi *alternando*, quando si paragona il primo antecedente al secondo antecedente, ed il primo conseguente al secondo conseguente cioè A a C, come B a D; imperocchè per la Prop. 2 essendo la somma degli estremi uguale a quella de' medj, cioè $A + D = B + C$, ancora in questa alternazione riesce lo stesso; però ancora in tale disposizione sono i termini aritmeticamente proporzionali, pel Coroll. 3. della Prop. 2. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Ancora gli ugualmente moltiplici, o submoltiplici de' termini aritmeticamente proporzionali riescono pure con l' aritmetica proporzione: Per esempio preso il numero m, se sono proporzionali A a B, come C a D, saranno parimente proporzionali mA ad mB, come mC ad mD, ed ancora $\frac{A}{m}$ a $\frac{B}{m}$, come $\frac{C}{m}$ a $\frac{D}{m}$; perchè es-

ſendo la ſomma degli eſtremi uguale a quella de' medj, cioè $A + D = B + C$ ancora tutti moltiplicati, o diviſi per m, rieſcono uguali; cioè $mA + mD = mB + mC$; ed $\frac{A}{m} + \frac{D}{m} = \frac{B}{m} + \frac{C}{m}$; e però queſti ancora ſono aritmeticamente proporzionali.

II. Eſſendo ancora altri quattro termini E, F, G, H aritmeticamente proporzionali, come gli altri A, B, C, D, o con la ſteſſa differenza, o con altra diverſa, aggiunti pure inſieme eſſi termini omologi, cioè $A + E, B + F, C + G, D + H$ ſono aritmeticamente proporzionali; perchè eſſendo $A + D = B + C$, ed $E + H = F + G$, ancora aggiunti queſti a quelli, rieſcono uguali, cioè $A + D + E + H = B + C + F + G$.

III. Anzi ancora diſgiungendo gli omologi minori da' maggiori, reſtano aritmeticamente proporzionali; cioè ſe gli ultimi quattro ſono minori de' primi, riuſciranno proporzionali $A - E$, $B - F$, $C - G$, $D - H$, perchè ancora $A + D - E - H = B + C - F - G$: Per eſempio ne' numeri eſſendo proporzionali $21 \cdot 18 :: 16 \cdot 13$, e queſti altri $8 \cdot 6 :: 5 \cdot 3$ non ſolo compreſi inſieme $21 + 8 \cdot 18 + 6 :: 16 + 5 \cdot 13 + 3$, cioè $29 \cdot 24 :: 21 \cdot 16$; ma ancora ſottraendo i ſecondi da' primi, ſaranno aritmeticamente proporzionali $21 - 8 \cdot 18 - 6 :: 16 - 5 \cdot 13 - 3$, cioè $13 \cdot 12 :: 11 \cdot 10$.

PRO-

PROPOSIZIONE V.

Le quantità A, B, C, D *essendo geometricamente proporzionali, il prodotto della moltiplicazione degli estremi è uguale al prodotto della moltiplicazione de' mezzi, cioè* AD = BC.

IL modo, con cui *A* contiene *B*, o è contenuto in esso, si esponga con la lettera *m* (che esprimerà o il doppio, o il triplo &c. o la metà, o il terzo &c. o la radice di qualche numero) sicchè sarà $A = mB$; e così ancora dovrà essere $C = mD$, mentre la loro proporzione geometrica importa, che tanto il primo contenga il secondo, quanto il terzo contiene il quarto, ed ancora quanto è contenuto il primo nel secondo, tanto il terzo si contiene nel quarto; dunque sarà $AD = mBD$, ed ancora $BC = BmD$; ma è lo stesso mBD, che BmD (essendo tanto questo, che quello il prodotto di *m* in *B*, ed in *D*); dunque il prodotto degli estremi *AD* uguaglia il prodotto de' medj *BC*. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente, se il prodotto degli estremi *AD* è uguale al prodotto de' mezzani *BC*, saranno geometricamente proporzionali $A \cdot B :: C \cdot D$, perchè in qualunque modo, che il primo *A* contenga il secondo *B*, o sia in esso contenuto; sarà $A = mB$; dunque $AD = mBD = BC$; onde da questi due ultimi prodotti levato il *B*, sarà ancora $mD = C$; onde *C* nel medesimo modo contiene *D*, o in esso è contenuto, come *A*

con-

contiene B, o è contenuto in esso; onde sono geometricamente proporzionali.

II. I termini geometricamente proporzionali ancora *convertendo*, ed anche *alternando* (purchè siano tutti quattro omogenei, altrimenti se fossero i due primi d' un genere, e gli altri due d' un altro, non si potrebbe paragonare il primo antecedente all' altro antecedente eterogeneo, nè il conseguente del primo genere al conseguente dell' altro) riescono pure geometricamente proporzionali; imperocchè essendo $AD = BC$, non solo $A \cdot B :: C \cdot D$, ma ancora saranno convertendo $B \cdot A :: D \cdot C$, ed alternando $A \cdot C :: B \cdot D$, essendo tanto in questa, che in quella disposizione il prodotto degli estremi uguale al prodotto de' mezzani, cioè $AD = BC$.

III. Essendo quattro linee proporzionali $A \cdot B$
FIG. 121. $:: C \cdot D$, il rettangolo dell' estreme AD sarà uguale al rettangolo delle medie BC, giacchè $AD = BC$; essendo questi rettangoli il prodotto di un lato nell' altro; e viceversa, se due rettangoli AD, BC sono uguali, starà il lato A del primo al lato B del secondo, come reciprocamente l' altro lato C del secondo al lato D del primo.

IV. Ed essendo tre linee rette continuamente
FIG. 122. proporzionali $A \cdot B :: B \cdot C$, il rettangolo dell' estreme uguaglia il quadrato della media, cioè $AC = B^2$; e viceversa essendo un rettangolo uguale ad un quadrato, sono continuamente proporzionali un lato A del rettangolo al lato B del quadrato, ed esso lato B del quadrato all' altro lato C del rettangolo.

FIG. 123. V. Quindi nel cerchio essendosi dimostrato il qua-

quadrato della tangente AH uguale al rettangolo GAI, o all'altro DAB delle feganti, ed il quadrato della FE perpendicolare al diametro uguale al rettangolo DEB delle parti di effo diametro, e due linee LN, IG, ovvero LN, BD, che feganfi dentro il circolo, fare uguali i rettangoli delle loro porzioni, cioè $NML = GMI$, ed $LKN = DKB$, è chiaro, che faranno ugualmente proporzionali tanto $GA \cdot AH :: AH \cdot AI$, quanto $DA \cdot AH :: AH \cdot AB$; ed ancora $DA \cdot AG :: AI \cdot AB$, per effere $GAI = DAB$, e tanto quefto, che quello $= AH^2$; e parimente proporzionali $DE \cdot EF :: EF \cdot EB$; ed $LM \cdot MG :: IM \cdot MN$, ed $LK \cdot DK :: BK \cdot KN$ per effere detti rettangoli tra loro uguali, come fi ha ne' corollarj della Prop. 19. nella prima Parte, cioè Coroll. 6. 7. 9. ed ancora nell'undecimo, effendo $DF^2 = BDE$, farà $BD \cdot DF :: DF \cdot DE$.

VI. Per quello fi è moftrato al Coroll. 12. dell' isteffa Prop. 19. come poffa dividerfi la retta AB in C, in maniera, che il rettangolo di tutta la AB in una fua parte BC riefca uguale al quadrato della rimanente AC, è manifefto, che così refterà divifa fecondo l'eftrema, e media ragione, imperocchè effendo $ABC = AC^2$ è l'intera AB alla parte AC, come la fteffa alla rimanente porzione CB. Anzi aggiungendo alla AC la uguale AD, farà pure la BD divifa in A, fecondo l'eftrema, e media ragione, perchè, ficcome $BC \cdot CA :: CA \cdot AB$, farà $BC \cdot CA :: DA \cdot AB$; e componendo $BA \cdot AC$ (cioè $BA \cdot AD$) $:: DB \cdot BA$, però DB, BA, AD riefcono proporzionali. FIG. 124. FIG. 125.

VII.

FIG. 126. VII. Volendo alle due rette DE, EF trovare la terza proporzionale, posta EF perpendicolare a DE, e congiunta DF, fatto l'angolo retto DFB, la qual retta FB convenga con DE prolungata in B, sarà la EB quella terza proporzionale, che ricercavasi, essendo $DEB = FE^2$, e però le linee continuamente proporzionali, cioè $DE \cdot EF :: EF \cdot EB$.

VIII. Ed ancora alle date due rette DE, EB volendo trovare la media proporzionale, poste quelle due insieme congiunte, e sopra il diametro DB fatto il semicircolo BFD, erettavi dal punto E la EF perpendicolare al diametro, sarà essa media proporzionale tra le due parti DE, EB; o pure essendo date le due linee DB, BE, fatto sopra BD il semicircolo, ed eretta la perpendicolare EF, congiunta BF sarà la media proporzionale tra le due DB, BE; ed ancora congiunta DF sarà media proporzionale fra DB, e DE, per essere il quadrato $BF^2 = DBE$; e l'altro quadrato $DF^2 = BDE$, siccome ancora $EF^2 = BED$.

PROPOSIZIONE VI.

Essendo le quantità proporzionali A · B :: C · D, *ancora* componendo *sono proporzionali* A + B · B :: C + D · D, *ed altresì* dividendo *riescono proporzionali* A — B · B :: C — D · D.

IMperocchè, essendo uguali i prodotti $AD = BC$, aggiunto di quà, e di là il prodotto BD, saranno $AD + BD = BC + BD$, onde $A + B \cdot B :: C + D \cdot D$, perchè ancora in questi il prodotto degli estremi uguaglia il prodotto de' mez-

mezzani; ed ancora levando alli due $AD = BC$ lo ſteſſo BD, ſaranno pure $AD - BD = BC - BD$; dunque ancora $A - B \cdot B :: C - D \cdot D$; onde tanto componendo, che dividendo i termini rimangono proporzionali.

COROLLARJ.

I. Ancora *per converſione di ragione*, cioè paragonando gli antecedenti al loro ecceſſo ſopra i conſeguenti ſono pure geometricamente proporzionali; imperocchè eſſendo $AD = BC$, levando queſto, e quello dal prodotto AC, ne rieſce $AC - AD = AC - BC$; però $A \cdot A - B :: C \cdot C - D$; e ſe ſono queſti termini tutti omogenei, ſarà pure la differenza degli antecedenti alla differenza de' conſeguenti, come qualſivoglia antecedente al ſuo conſeguente; cioè $A - C \cdot B - D :: A \cdot B :: C \cdot D$; imperocchè al prodotto AB levando l'uno, e l'altro de' prodotti uguali AD, e BC, ne riuſcirà $AB - AD = AB - BC$, e però $A - C \cdot B - D :: A \cdot B$; giacchè il prodotto degli eſtremi uguaglia il prodotto de' mezzani.

II. Similmente rimangono proporzionali, paragonando le ſomme, o le differenze de' termini omologi, tanto agli antecedenti, quanto alli conſeguenti, o alle loro ſomme, o alle differenze de' medeſimi, come nella Tavola ſuſſeguente, in cui le prime 12 proporzioni ſi verificano ancora in quei caſi, ne' quali i due primi termini ſono tra loro omogenei, e gli altri due tra di loro, e non co' precedenti; ma tutte poi ſi adattano generalmente a i 4 termini proporzionali tra di loro tutti omogenei. TA-

TAVOLA ANALOGICA.

1	$A \cdot B :: C \cdot D$
2	$B \cdot A :: D \cdot C$.
3	$A+B \cdot B :: C+D \cdot D$
4	$B \cdot A+B :: D \cdot C+D$
5	$A+B \cdot A :: C+D \cdot C$
6	$A \cdot A+B :: C \cdot C+D$
7	$A-B \cdot B :: C-D \cdot D$
8	$B \cdot A-B :: D \cdot C-D$
9	$A-B \cdot A :: C-D \cdot C$
10	$A \cdot A-B :: C \cdot C-D$
11	$A+B \cdot A-B :: C+D \cdot C-D$
12	$A-B \cdot A+B :: C-D \cdot C+D$
13	$A+C \cdot B+D :: C \cdot D$
14	$B+D \cdot A+C :: D \cdot C$
15	$A+C \cdot B+D :: A \cdot B$
16	$B+D \cdot A+C :: B \cdot A$
17	$A-C \cdot B-D :: C \cdot D$
18	$B-D \cdot A-C :: D \cdot C$
19	$A-C \cdot B-D :: A \cdot B$
20	$B-D \cdot A-C :: B \cdot A$
21	$A+C \cdot B+D :: A-C \cdot B-D$
22	$B+D \cdot A+C :: B-D \cdot A-C$
23	$A+C+B+D \cdot C+D :: B+D \cdot D$
24	$C+D \cdot A+C+B+D :: D \cdot B+D$
25	$A+C+B+D \cdot C+D :: A+C \cdot C$
26	$C+D \cdot A+C+B+D :: C \cdot A+C$

27 A · C :: B · D
28 C · A :: D · B
29 A + B · C + D :: B · D
30 C + D · A + B :: D · B
31 A + B · C + D :: A · C
32 C + D · A + B :: C · A
33 A — B · C — D :: B · D
34 C — D · A — B :: D · B
35 A — B · C — D :: A · C
36 C — D · A — B :: C · A
37 A + B · C + D :: A — B · C — D
38 C + D · A + B :: C — D · A — B
39 A + C · C :: B + D · D
40 C · A + C :: D · B + D
41 A + C · A :: B + D · B
42 A · A + C :: B · B + D
43 A — C · C :: B — D · D
44 C · A — C :: D · B — D
45 A — C · A :: B — D · B
46 A · A — C :: B · B — D
47 A + C · A — C :: B + D · B — D
48 A — C · A + C :: B — D · B + D
49 A + C + B + D · B + D :: C + D · D
50 B + D · A + C + B + D :: D · C + D
51 A + C + B + D · A + C :: C + D · C
52 A + C · A + C + B + D :: C · C + D

53 $A+B+C+D \cdot A+B :: A+C \cdot A$
54 $A+B \cdot A+B+C+D :: A \cdot A+C$
55 $A+B+C+D \cdot A+B :: B+D \cdot B$
56 $A+B \cdot A+B+C+D :: B \cdot B+D$
57 $A+B+C+D \cdot A-B+C-D :: C+D \cdot C-D$
58 $A-B+C-D \cdot A+B+C+D :: C-D \cdot C+D$
59 $A+B+C+D \cdot A-B+C-D :: A+B \cdot A-B$
60 $A-B+C-D \cdot A+B+C+D :: A+B \cdot A-B$
61 $A+B+C+D \cdot A-C+B-D :: A+C \cdot A-C$
62 $A-C+B-D \cdot A+B+C+D :: A-C \cdot A+C$
63 $A+B+C+D \cdot A-C+B-D :: B+D \cdot B-D$
64 $A-C+B-D \cdot A+B+C+D :: B-D \cdot B+D$
65 $A-B+C-D \cdot C-D :: A+C \cdot C$
66 $C-D \cdot A-B+C-D :: C \cdot A+C$
67 $A-B+C-D \cdot A-B :: A+C \cdot A$
68 $A-B \cdot A-B+C-D :: A \cdot A+C$
69 $A-B+C-D \cdot A-B :: B+D \cdot B$
70 $A-B \cdot A-B+C-D :: B \cdot B+D$
71 $A-C+B-D \cdot A-C :: A+B \cdot A$
72 $A-C \cdot A-C+B-D :: A \cdot A+B$
73 $A-C+B-D \cdot A-C :: C+D \cdot C$
74 $A-C \cdot A-C+B-D :: C \cdot C+D$
75 $A-C+B-D \cdot B-D :: C+D \cdot D$
76 $B-D \cdot A-C+B-D :: D \cdot C+D$
77 $A-C+B-D \cdot B-D :: A+B \cdot B$
78 $B-D \cdot A-C+B-D :: B \cdot A+B$
79 $A-C+B-D \cdot C-D :: B+D \cdot D$
80 $C-D \cdot A-C+B-D :: D \cdot D+B$
81 $A-B-C+D \cdot C-D :: B-D \cdot D$
82 $C-D \cdot A-B-C+D :: D \cdot B-D$
83 $A-B-C+D \cdot C-D :: A-C \cdot C$
84 $C-D \cdot A-B-C+D :: C \cdot A-C$

85 A + B + C + D · A + C :: A + B · A

86 A + C · A + B + C + D :: A · A + B

87 A + B + C + D · B + D :: A — B · B

88 B + D · A + B + C + D :: B · A + B

89 A + B + C + D · C + D :: A — B + C — D · C — D

90 C + D · A + B + C + D :: C — D · A — B + C — D

91 A + B + C + D · A + B :: A — B + C — D · A — B

92 A + B · A + B + C + D :: A — B · A — B + C — D

93 A + B + C + D · A + C :: A — C + B — D · A — C

94 A + C · A + B + C + D :: A — C · A — C + B — D

95 A + B + C + D · B + D :: A — C + B — D · B — D

96 B + D · A + B + C + D :: B — D · A — C + B — D

97 A — B + C — D · A + C :: C — D · C

98 A + C · A — B + C — D :: C · C — D

99 A — B + C — D · A + C :: A — B · A

00 A + C · A — B + C — D :: A · A — B

01 A — B + C — D · B + D :: A — B · B

02 B + D · A — B + C — D :: B · A — B

03 A — C + B — D · A + B :: A — C · A

04 A + B · A — C + B — D :: A · A — C

05 A — C + B — D · C + D :: A — C · C

06 C + D · A — C + B — D :: C · A — C

07 A — C + B — D · C + D :: B — D · D

08 C + D · A — C + B — D :: D · B — D

09 A — C + B — D · A + B :: B — D · B

10 A + B · A — C + B — D :: B · B — D

11 A — C + B — D · B + D :: C — D · D

12 B + D · A — C + B — D :: D · C — D

13 A — B — C + D · B — D :: C — D · D

14 B — D · A — B — C + D :: D · C — D 335

15 A — B — C + D · A — C :: C — D · C

16 A — C · A — B — C + D :: C · C — D &c.

PROPOSIZIONE VII.

Se maggiore è la ragione di A *a* B, *che di* C *a* D, *il prodotto dell' estreme* AD *sarà maggiore del prodotto delle medie* BC; *e qualunque volta il prodotto dell' estreme è maggiore del prodotto delle mezzane, sarà maggiore la ragione della prima ad una delle medie, che dell' altra media all' ultima.*

IMperocchè, se fosse *E* a *B* nella stessa ragione di *C* a *D*, sarà pure maggior ragione di *A* a *B*, che di *E* a *B*, onde *A* sarà maggiore di *E*. per la defin. 7. onde il prodotto di *AD* sarà pure maggiore di *ED*, ed essendo $ED = CB$, per essere $E \cdot B :: C \cdot D$, dunque *AD* è altresì maggiore di *CB*; e vicendevolmente, essendo *AD* maggiore di *CB*, sarà ancora maggiore di *ED*, onde *A* riesce maggiore di *E*, ed è maggior ragione di *A* a *B*, che di *E* a *B*, cioè che di *C* a *D*; onde essendo il prodotto de' termini estremi maggiore del prodotto de' mezzani, è maggiore la ragione di *A* a *B*, che di *C* a *D*.

COROLLARJ.

I. Ancora *alternando* (se sono i termini omologj) sarà maggiore la ragione di *A* a *C*, che di *B* a *D*, essendo il prodotto *AD* maggiore del prodotto *CB*.

II. Ed altresì *componendo*, o *dividendo* i termini analogi, sarà maggior ragione di $A \pm B$ a *B*, che di $C \pm D$ a *D*, perchè il prodotto $AD > BC$, aggiunto, o levato di quà, e di là il *BD*,

sarà

farà pure $AD + BD > BC + BD$; e però $A + B \cdot B > C + D \cdot D$, riuscendo il prodotto degli estremi maggiore del prodotto de' mezzani.

III. Ma *convertendo* è minore la ragione di B ad A, che di D a C, mentre il prodotto delli estremi BC riesce minore del prodotto de' mezzani AD; ed ancora per *conversione di ragione* è minore quella di A ad $A - B$, che di C a $C - D$, perchè il prodotto $AC - AD$ farà minore di $AC - BC$, levandosi dal prodotto AC il prodotto AD maggiore di BC.

PROPOSIZIONE VIII.

Essendo proporzionali A · B :: C · D *ancora gli ugualmente moltiplici degli antecedenti per qualunque numero* m, *e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti per qualsivoglia numero* n, *sono pure proporzionali* m A · n B :: m C · n D; *e vicendevolmente, essendo proporzionali gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, e gli ugualmente moltiplici de' conseguenti, saranno ugualmente proporzionali essi antecedenti a' conseguenti semplicemente posti.*

PErchè essendo $AD = BC$, moltiplicando l' uno. e l' altro per mn, farà pure $mAnD = nBmC$; dunque $mA \cdot nB :: mC \cdot nD$; ed essendo questi moltiplici proporzionali, siccome farà $mAnD = nBmC$, dividendo l' uno, e l' altro per mn, si averà $AD = BC$, e però $A \cdot B :: C \cdot D$.

COROLLARJ.

I. Gli ugualmente moltiplici degli antecedenti essendo proporzionali ad altri ugualmente moltiplici de' conseguenti, è chiaro, che se mA è uguale, o maggiore, o minore di mC, ancora nB è parimente uguale, o maggiore, o minore di nD, altrimenti non sarebbero ancora essi proporzionali; e però si accordano gli ugualmente moltiplici degli antecedenti con gli ugualmente moltiplici de' conseguenti in uguagliare, o superare, o mancare l'uno dall'altro.

II. Onde quelle quantità solamente possono essere proporzionali, in cui tutti gli ugualmente moltiplici degli antecedenti, ed altri ugualmente moltiplici de' conseguenti sempre riescono o parimente uguali, o parimente maggiori, o parimente minori, paragonando i moltiplici degli antecedenti a' moltiplici de' conseguenti; perocchè se mai fosse $mA > nB$; ma poi $mC < nD$, sarebbe $mAnD > nBnD$, ed $nBnD > nBmC$, e però $mAnD > nBmC$, onde non sarebbe $A \cdot B :: C \cdot D$; ma sarebbe $A \cdot B > C \cdot D$, perchè essendo $mAnD > nBmC$, detrattone di quà, e di la mn, sarebbe $AD > BC$.

PROPOSIZIONE IX.

TAV. VIII. FIG. 127. *Le grandezze, che crescono ugualmente, secondo che altre grandezze ugualmente crescono, saranno tra di loro proporzionali: Così li triangoli ugualmente alti* ACB, ACD *sono proporzionali alle loro basi* CB, CD; *e così ancora li parallelogrammi* ACBI, ACDK *sono nell' istes-*

sa

sa proporzione de' triangoli ugualmente alti, e delle loro basi,

IMperocchè, essendo tra le medesime parallele *MH*, *GE* tanto i triangoli ugualmente alti *ACB*, *ACD*, quanto i parallelogrammi *ACBI*, *ACDK* sono proporzionali alle basi *CB*, *CD*, perchè posta *CE* doppia di *CB*, ancora il triangolo *ACE* riesce doppio di *ACB*, ed il parallelogrammo *ACEH* si fa doppio di *ACBI*; e prendendo pure la base *CG* tripla di *CD*, tanto il triangolo *ACG* riesce triplo di *ACD*, quanto il parallelogrammo *ACGM* si fa triplo di *ACDK*, per essere sì i triangoli, che i parallelogrammi tra le parallele uguali con le basi uguali, onde ugualmente crescono, crescendo le basi, tanto i triangoli, che i parallelogrammi, e secondo che fosse la $CE = CG$, sarebbe tanto il triangolo $ACE = ACG$, quanto il parallelogrammo $ACEH = ACGM$; e se fosse $CE > CG$, sarebbe pure $ACE > ACG$, ed $ACEH > ACGM$; se fosse $CE < CG$, sarebbe pure $ACE < ACG$, ed $ACEH < ACGM$; e però secondo il Coroll. 2. della precedente proposizione, bisogna che siano proporzionali $CB \cdot CD :: ACB \cdot ACD :: ACBI \cdot ACDK$.

COROLLARJ.

I. Nel cerchio gli angoli *CAB*, *CAD* fatti al centro, o quelli fatti alla circonferenza *CHB*, *CHD*, ed ancora li settori *BCA*, *CDA* sono proporzionali agli archi *BC*, *CD*, sopra di cui sono fatti; imperocchè moltiplicando l' arco FIG. 118.

CB nell'arco CE, e l'arco DC nell' altro CG, si moltiplicheranno ugualmente gli angoli al centro, e alla circonferenza, e li settori medesimi, essendo $CE \cdot CB :: CAE \cdot CAB :: CHE \cdot CHB :: ECA \cdot BCA$, moltiplicandosi ancora essi angoli, ed essi settori, come è moltiplicato l' arco, sopra di cui sono posti: e così ancora $CG \cdot CD :: CAG \cdot CAD :: CHG \cdot CHD :: CGA \cdot CDA$, e se fosse $CE = CG$ sarebbero ancora quei moltiplici angoli, ed i moltiplici settori uguali, e secondo che fosse CE maggiore, o minore di CG, sarebbero pure gli angoli fatti al centro, o alla circonferenza sopra CE parimente maggiori, o minori di quelli fatti sopra CG, ed il settore ECA sarebbe pure maggiore, o minore dell' altro CGA; dunque gli angoli, e li settori fatti sopra gli archi CB, CD sono proporzionali a' detti archi, essendo i moltiplici degli antecedenti, ed i moltiplici de' conseguenti talmente disposti, che si accordano in uguagliarsi, o superarsi, o diminuirsi l' uno dall' altro suo omogeneo.

II. Generalmente gli spazj, fatti con uguale velocità in varj tempi, sono proporzionali a' detti tempi, perchè moltiplicatosi il *tempo*, ugualmente si moltiplicano gli spazj, e secondo che il moltiplice del tempo, di cui fu fatto uno spazio, è uguale, maggiore, o minore del moltiplice del tempo, in cui fu corso un altro spazio, ancora lo spazio moltiplice del primo è uguale, maggiore, o minore dello spazio moltiplice del secondo: Per esempio, in un ora si facciano 3. miglia di spazio; e con la stessa velocità in 3.

ore

ore ſi faranno 9. miglia; ed in 20. minuti facendoſi un miglio, in cento minuti ſi faranno cinque miglia; ſiccome 3 ore ſono maggiori di 100. minuti, eſſendo quelle 180. minuti; così le 9. miglia, fatte in 3. ore, ſono maggiori delle 5. miglia fatte in 100. minuti; e ſe detti tempi foſſero uguali, ſarebbero pure gli ſpazj uguali, e quando un tempo è minore dell' altro, lo ſpazio del primo è pure minore dello ſpazio ſecondo; però ſono proporzionali i tempi agli ſpazj; cioè come un ora a 20. minuti (che è tripla quella di queſto) così 3 miglia ad un miglio &c.

PROPOSIZIONE X.

Eſſendo molti antecedenti A, C, E, G *proporzionali ad altrettanti conſeguenti* B, D, F, H, *componendo ſarà la ſomma di tutti gli antecedenti alla ſomma di tutti i conſeguenti, come uno degli antecedenti al ſuo conſeguente.*

IMperocchè, preſi gli ugualmente moltiplici degli antecedenti col numero m, ed altri ugualmente moltiplici de' conſeguenti col numero n, converranno quelli con queſti o nell' ugualità, o nell' eccesso, o nel difetto; cioè ſe $mA = nB$, ancora mC ſarà $= nD$, ſiccome pure $mE = nF$, ed $mG = nH$; onde tutti gli antecedenti $mA + mC + mE + mG$ ſaranno uguali a tutti i conſeguenti $nB + nD + nF + nH$; e ſe foſſe mA maggiore, o minore di nB, ſarebbero pu-

$A \cdot B ::$
$C \cdot D ::$
$E \cdot F ::$
$G \cdot H$

$mA \cdot nB ::$
$mC \cdot nD ::$
$mE \cdot nF ::$
$mG \cdot nH$

re $mA + mC + mE + mG$, maggiori, o minori di $nB + nD + nF + nH$, essendo quelli moltiplici degli antecedenti $A + C + E + G$, come mA è moltiplice di A, e questi altri ancora moltiplici de' conseguenti $B + D + F + H$, come nB è moltiplice di B; però deve essere la somma di tutti gli antecedenti alla somma di tutti i conseguenti, come uno degli antecedenti al suo conseguente, cioè $A + C + E + G \cdot B + D + F + H :: A \cdot B$; il che dovevasi dimostrare.

COROLLARJ.

I. Essendo una progressione continuamente pro-

$$A \cdot B \cdot C \cdot D \cdot E \cdot F$$
$$1. \quad 3. \quad 9. \quad 27. \quad 81. \quad 243.$$

porzionale A, B, C, D, E, F, sarà parimente come il primo termine A al secondo B, così la somma di tutti i termini senza l'ultimo (che saranno tutti gli antecedenti) alla somma di tutti senza il primo (che sono tutti gli conseguenti) cioè $A \cdot B :: A + B + C + D + E \cdot B + C + D + E + F$ cioè 1. 3. :: 121 · 363.

II. La somma di tutti i termini continuamente proporzionali è uguale alla differenza del prodotto del secondo nell' ultimo, dal quadrato del primo, divisa per la differenza de' primi due termini; imperocchè la somma di tutti i termini si chiami $= S$; perchè dunque sarà $A \cdot B :: S - F \cdot S - A$, il prodotto degli estremi essendo uguale al prodotto de' medj, averemo

AS

$AS - AA = BS - BF$; e ſe A è maggiore di B, ſi traſportino eſſi termini in queſta diſpoſizione $AS - BS = AA - BF$; e però dividendo per $A - B$, ſi averà $S = \frac{AA - BF}{A - B}$. Se poi A foſſe minore di B, ſi traſportino i termini in queſt' altra maniera $BS - AS = BF - AA$, e dividendo per $B - A$, ſarà la ſomma $S = \frac{BF - AA}{B - A}$, cioè ſempre uguale alla differenza del prodotto BF, e del quadrato AA, diviſa per la differenza de' due termini A, e B.

III. Se la ſerie decreſce in infinito dal primo termine maggiore di tutti, ſarà l' ultimo $= 0$; e però $S = \frac{AA}{A - B}$, non dovendo aggiungervi il $- BF$, che è $= 0$, ſupponendoſi l'ultimo F eſſer nulla; onde tali ſerie proporzionali, continuate in infinito a minori, e minori termini fino allo zero ſono uguali al quadrato del primo termine, diviſo con la differenza del primo dal ſecondo: Per eſempio $1 . \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{64}$ &c. in infinito $= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}$ ed è $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, per cui diviſa l' unità $= 2$ dunque eſsa continua ſerie $= 2$, e levatane la prima unità, le frazioni $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ &c. $= 1$ e la ſerie delle frazioni $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81}$ &c. $= \frac{1}{2}$, eſſendo il quadrato del primo termine $= \frac{1}{9}$ (che è il ſecondo termine) e la differenza di $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ per cui diviſo $\frac{1}{9}$ rieſce $\frac{1}{2}$. Similmente la ſerie $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64}$ &c. $= \frac{1}{3}$ perchè il quadrato del primo termine è il ſecondo $\frac{1}{16}$ che diviſo per $\frac{1}{4} - \frac{1}{16}$, cioè per $\frac{3}{16}$, diventa $= \frac{1}{3}$;

$= \frac{1}{3}$; e così le altre ſerie proporzionali, che cominciano dopo l' unità con una frazione ſono uguali al medeſimo modo; cioè ſe il denominatore è il numero n, deve levarſi l' unità, e allora la prima frazione con tale denominatore è uguale a tutta la ſerie continua: Per eſempio ſe la ſerie foſſe $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^5}$ &c. ſarà $= \frac{1}{n-1}$; e così $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{1}{10000}$ &c. $= \frac{1}{9}$, ed ancora $\frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{2}{10000}$ &c. ſarebbe $= \frac{2}{9}$ eſſendo il doppio dell' antecedente; onde può dirſi generalmente, che la ſerie continuamente proporzionale in infinito prodotta, come $\frac{m}{n} + \frac{m}{n^2} + \frac{m}{n^3} + \frac{m}{n^4} + \frac{m}{n^5}$ &c. $= \frac{m}{n-1}$.

IV. Quindi può ſcioglierſi il Soſiſma di Zenone, col quale pretendeva dimoſtrare, che Achille non poteſſe mai arrivare col ſuo moto la Teſtuggine, perchè nel tempo, in cui quello faceva un miglio, queſta ne faceva la decima parte, e compita da quello l' iſteſſa decima parte, queſta ſi avanzava per una parte centeſima, e quello giungendo al termine di eſſa centeſima parte, queſta ſarebbe avanti la parte milleſima &c. Nel che può oſſervarſi, che quella ſerie di parti di miglio $\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000}$, ſono $= \frac{1}{9}$ di miglio, al quale arrivando la Teſtuggine, vi ſarebbe pure giunto Achille, e l' averebbe arrivata, perchè avendo eſſo una velocità dieci volte maggiore di quella della Teſtuggine, poteva fare

fare dieci parti none del miglio nel tempo, che ne faceva questa una nona parte; onde essendo lontano da essa un miglio, nel tempo medesimo potè arrivarla, avendo fatto un miglio ed $\frac{1}{9}$, cioè $\frac{10}{9}$ parti del miglio, quando quella ne fece una sola nona parte.

PROPOSIZIONE XI.

Essendo quante si vogliano grandezze omogenee A, B, C, D *da una parte, ed altre, o dello stesso, o di genere diverso* E, F, G, H, *omogenee tra loro; e siano* ordinatamente *proporzionali* A · B :: E · F; *ed ancora* B · C :: F · G, *ed altresì* C · D :: G · H; *ovvero* perturbatamente, *fosse* A · B :: G · H, *ma* B · C :: E · F, *e* C · D :: F · G; *tanto in questo modo promiscuo, quanto nel primo esattamente disposto, sarà la prima* A *all' ultima* D, *come la prima* E *all' ultima* H.

A	3	E	9	15
B	5	F	15	24
C	8	G	24	30
D	10	H	30	50

Imperocchè la ragione di A a D, per la definiz. 8. si compone delle ragioni $A \cdot B$, di $B \cdot C$, e di $C \cdot D$; e parimente la ragione di E ad H è composta di $E \cdot F$, di $F \cdot G$, e di GH; dunque essendo tutte le ragioni della prima serie uguali ad altrettante della serie seconda, o con ordine continuo, o con ordine perturbato, deve essere uguale la ragione di $A \cdot D$ all' altra di $E \cdot H$. Il che dovea dimostrarsi.

Co-

COROLLARJ.

I. Se fosse $A \cdot B :: C \cdot D$, e poscia un altro termine E allo stesso B, come un altro F al medesimo D, sarà pure $A + E \cdot B :: C + F \cdot D$, perchè convertendo, $B \cdot E :: D \cdot F$, dunque per questa proposizione, $A \cdot E :: C \cdot F$, e componendo $A + E \cdot E :: C + F \cdot F$; ed è $E \cdot B :: F \cdot D$, dunque $A + E \cdot B :: C + F \cdot D$.

FIG. 129. II. I triangoli, o i parallelogrammi ABC, EBD, che hanno un angolo B uguale, saranno tra di loro in ragione composta de' lati, che sono intorno quell' angolo, cioè di AB a BD, e di CB a BE; imperocchè posto il lato BD in direzione del lato BA, onde per l' ugualità dell' angolo riuscirà ancora il lato EB nella direzione del lato BC, congiunta la retta CD ne' triangoli, o prolungate ne' parallelogrammi le rette GD, FC, che concorrano in H, onde riuscirà di mezzo il triangolo CBD, ed il parallelogrammo $CBDH$, sarà il triangolo ABC al triangolo CBD, o pure ancora il parallelogrammo BF al parallelogrammo BH in ragione delle basi AB a BD, essendo ugualmente alti essi triangoli, e parallelogrammi; ma il triangolo CBD al triangolo EBD, ed ancora il parallelogrammo BH al parallelogrammo BG, che sono pure ugualmente alti, sono in ragione delle basi loro, CB a BE; dunque perchè il triangolo ABC al triangolo EBD è in ragione composta di ABC a CBD, e di CBD ad EBD, sarà pure ABC ad EBD in ragione composta di AB a BD, e di CB a BE; e lo stesso riesce ne' parallelogrammi $ABCF$, $EBDG$, la cui

cui ragione è composta di BF a BH, e di BH a BG, e però è composta della ragione de' lati AB a BD, e CB a BE, che sono intorno al loro angolo uguale B, come dovea dimostrarsi.

III. Se i lati de' triangoli, o de' parallelogrammi intorno all'angolo uguale sono reciprocamente proporzionali, cioè $AB \cdot BD :: EB \cdot BC$, essi triangoli, o parallelogrammi saranno tra di loro uguali, perchè similmente il triangolo, o parallelogrammo ABC al mezzano CBD, sarà come EBD allo stesso CBD, essendo come le loro basi reciprocamente proporzionali, e però $ABC = EBD$.

PROPOSIZIONE XII.

A · 90	C · 3	D · 7
B · 91	E · 15	F · 2
	G · 4	H · 13

Se la ragione di due quantità, come A *a* B, *sia composta delle ragioni di* C *a* D, *di* E *ad* F, *e di* G *ad* H, *sarà essa ragione uguale a quella del prodotto degli antecedenti al prodotto de' conseguenti, cioè* A · B :: CEG · DFH.

IMperocchè ancora tali prodotti CEG, DFH sono in ragione composta di C a D, di E ad F, e di G ad H, potendosi paragonare CEG a DEG, DEG a DFG, e DFG a DFH, de' quali essendo il primo al secondo come C a D, il secondo al terzo come E ad F, ed il terzo al quarto come G ad H, sarà di queste stesse ragioni composta la ragione di CEG a DFH, per la def. 8. e però essendo A a B parimente in ragione compo-

po-

posta di C a D, di E ad F, e di G ad H, necessariamente $A \cdot B :: CEG \cdot DFH$. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Quindi l' istessa ragione può dirsi ancora composta delle ragioni promiscue di essi antecedenti paragonati ad altri conseguenti diversamente disposti, come chi dicesse, essere la ragione di A a B ancora composta di C ad H, di G ad F, e di E a D, perchè comunque siano disposti i medesimi antecedenti, ed i conseguenti, fanno gli stessi prodotti CEG, e DFH, la ragione de' quali è l'istessa, che di A a B.

II. Di quelle ragioni componenti qualunque antecedente, paragonato ad uno de' conseguenti, sarà in ragione composta e della ragione proposta direttamente, e dell' altre componenti ragioni, prese inversamente; cioè C a D sarà in ragione composta di A a B, e di F ad E, e di H a G; o pure paragonando E ad H, avrà ragione composta di A a B, di D a C, e di F a G; imperocchè essendo $A \cdot B :: CEG \cdot DFH$, moltiplicando tra se gli estremi, e tra se i medj, deve essere $ADFH = BCEG$; dunque $C \cdot D :: AFH \cdot BEG$, e però in ragione composta di A a B, di F ad E, e di H a G; e paragonando $E \cdot H :: ADF \cdot BCG$, onde E ad H ha ragione composta di A a B, di D a C, e di F a G; come ne' numeri quì aggiunti si può ritrovare lo stesso.

PROPOSIZIONE XIII.

FIG. 130. *Nel triangolo* ABC *tirata qualunque retta* DE *parallela alla base* AC, *saranno i lati* AB, CB

CB *divisi proporzionalmente, cioè* AD · DB :: CE · EB, *ed* AB · BD :: CB · BE; *vicendevolmente, se i lati* AB, CB *sono segati da una linea* DE *in parti proporzionali, sarà la* DE *parallela alla base* AC.

IMperocchè congiunte le rette *AE*, *CD*, sarà il triangolo *ADE* uguale all' altro *CDE*, che sulla medesima base *DE* sono tra le medesime parallele (per la Prop. 12. della prima parte) dunque averà la stessa ragione *ADE* a *DBE*, che *CDE* al medesimo *DBE*, ma sono *ADE* · *DBE* :: *AD* · *DB*, ed ancora *CDE* · *DBE* :: *CE* · *EB*; dunque sono proporzionali *AD* · *DB* :: *CE* · *EB*, e componendo *AB* · *BD* :: *CB* · *BE*; E similmente essendo *AD* · *DB* :: *CE* · *EB*, saranno i triangoli *ADE* · *DBE* :: *CDE* · *DBE*; dunque *ADE* = *CDE*, e però sono le *AC*, *DE* parallele; il che &c.

COROLLARJ.

I. Condotta la *DF* parallela a *BC*, sarà similmente *AF* · *FC* :: *AD* · *DB*; e componendo *AC* · *CF* :: *AB* · *BD*; ma sarà *FC* = *DE*, dunque *AC* · *DE* :: *AB* · *BD* :: *CB* · *BE*; dunque la base del triangolo alla retta, condottagli parallela tra i lati, sta come uno de' lati alla porzione di esso, tra 'l vertice, e detta linea parallela alla base.

II. E se fossero tirate più rette *BF*, *BG* dal vertice alla base, segate dalla *DE* parallela alla base ne' punti *H*, *I*, saranno tutte divise proporzionalmente in *H*, *I*, come i lati in *D*, *E*; e li segmenti *DH*, *HI*, *IE* saranno pure proporzionali alle parti della base *AF*, *FG*, *GC*; essendo FIG. 131.

AF

$AF \cdot DH :: FB \cdot BH :: FG \cdot HI :: GB \cdot BI :: GC \cdot IE$; onde ancora permutando $DH \cdot HI :: AF \cdot FG$, ed $HI \cdot IE :: FG \cdot GC$.

FIG. 132. III. E se volesse dividersi una retta BC nell' istessa proporzione, in cui fosse divisa un altra BA ne' punti D, F; congiunta la retta AC, e tirategli parallele le rette DE, FG, sarà essa BC divisa nella stessa proporzione, in cui è divisa quella.

FIG. 133. IV. Volendo alle due linee BD, DA trovare la terza proporzionale, aggiunta in qualche angolo alla retta BDA la BE uguale a DA, congiunta DE, e tiratagli parallela la AC, che convenga con BE prolungata in C, sarà la EC la terza proporzionale, essendo $BD \cdot DA :: BE \cdot EC$, e la $BE = DA$; e se fossero tre linee diverse BD, DA, BE, fatto il medesimo come sopra, riuscirebbe EC quarta proporzionale alle tre date.

PROPOSIZIONE XIV.

FIG. 134. *Se li triangoli* ABC, FGH *sono equiangoli, essendo l' angolo* A *uguale all' angolo* F, *ed il* B *al* G, *ed il* C *all'* H, *averanno i lati proporzionali, e si dimanderanno* Triangoli simili.

SI ponga intorno l' angolo $A = F$ la parte AD del lato $AB = FG$, e la parte AE del lato $AC = FH$; congiunta DE sarà uguale ancor essa a GH, e l' angolo $ADE = FGH$, il quale si suppone $= ABC$; dunque DE riesce parallela a BC; e però $AB \cdot AD :: BC \cdot DE :: CA \cdot AE$; dunque essendo i lati del triangolo ADE uguali a quelli del dato triangolo FGH, sono proporzionali i lati $AB \cdot FG :: BC \cdot GH :: CA \cdot FH$, e permutando,

AB

$AB \cdot AC :: GF \cdot FH$; ed $AC \cdot CB :: FH \cdot HG$; perciò diconsi triangoli simili.

COROLLARJ.

I. Essendo intorno agli angoli uguali A, F li due lati BA, ed AC proporzionali alli due GF, FH, ancora gli altri angoli saranno uguali, e l'altro lato BC al primo BA, ed al secondo CA sarà nella stessa proporzione che GH ad FG, e ad FH, cioè essi triangoli saranno simili; imperocchè fatta $AD = FG$, ed $AE = FH$, congiunta DE, sarà parallela a BC, essendo pure $BA \cdot AC :: AD \cdot AE$, e permutando $AB \cdot AD :: CA \cdot AE$; onde gli angoli ADE, ed AED, che sono gli stessi degli altri FGH, FHG, saranno uguali agli angoli ABC, ACB.

II. Essendo tutti i lati del triangolo ABC proporzionali a' lati del triangolo FGH, cioè $BA \cdot GF :: CA \cdot HF :: BC \cdot GH$, essi triangoli pure saranno equiangoli, e però simili; perchè poste $AD = GF$, ed $AE = FH$, sarà pure $BA \cdot AD :: CA \cdot AE$, e congiunta DE, sarà parallela a BC, onde $BC \cdot DE :: CA \cdot AE$, cioè $:: CA \cdot FH$, e però $:: BC \cdot GH$; onde ancora $DE = GH$, e però ADE sarà equiangolo ad FGH, onde ancora ABC sarà equiangolo ad FGH.

III. Nel triangolo rettangolo ABC condotta dall' angolo retto sopra la base AC la perpendicolare BD, saranno i triangoli ABD, CDB simili tra di se, ed ancora simili al triangolo intero ABC, essendo tutti tre equiangoli; e la perpendicolare BD è media proporzionale fra le due porzioni AD, DC, essendo $AD \cdot BD$ FIG. 135.

 $:: BD$

:: *BD* · *DC*; ed i lati *AB*, e *BC* sono medj proporzionali tra la base *AC*, e le parti corrispondenti *AD*, *DC*; essendo *AC* · *AB* :: *AB* · *AD*; ed *AC* · *CB* :: *CB* · *CD*.

PROPOSIZIONE XV.

I poligoni ABCDE, FGHIK *del medesimo* FIG. 136. *numero di lati, avendo l' uno gli angoli uguali agli angoli corrispondenti dell' altro, compresi da' lati proporzionali, si possono dividere in triangoli simili, e tutta la figura dell' uno dicesi* simile *a quella dell' altro.*

Essendo l' angolo *B* uguale all' angolo *G*, condotte le rette *AC*, *FH*, saranno i triangoli *ABC*, *FGH* simili, per essere intorno agli angoli *B*, e *G* uguali i lati proporzionali *AB* · *BC* :: *FG* · *GH*; e così ancora il triangolo *AED* sarà simile al triangolo *FKI*, ed ancora *CAD* simile ad *HFI*, perchè essendo l' angolo *BAE* = *GFK*, e l' angolo *BAC* = *GFH*, e l' altro *DAE* = *IFK*, il rimanente *CAD* = sarà *HFI*, e proporzionali *CA* · *AD* :: *HF* · *FI*; dunque tutti i triangoli, inscritti nell' uno, sono simili a' triangoli inscritti nell' altro, onde la figura *ABCDE* riesce simile all' altra *FGHIK*.

COROLLARJ.

I. Tutto il perimetro di un poligono a tutto il perimetro dell' altro simile è proporzionalmente come il lato dell' uno al lato corrispondente dell' altro, perchè essendo qualsivoglia lato del primo Poligono proporzionale al lato corrispondente

te del secondo Poligono, saranno pure tutti i lati del primo, che sono il suo perimetro, a tutti i lati del secondo, che compongono il perimetro di questo, nell' istessa ragione, in cui un lato del primo è al lato corrispondente del secondo.

II. Ne' due cerchj concentrici condotte per lo centro *N* quante si vogliano rette, seganti amendue le periferie, *NGA*, *NHB*, *NIC* &c. e tirate le corde agli archi segati, cioè *AB*, e *GH*; *BC*, ed *HI*; *CD*, ed *IK* &c. riusciranno simili i poligoni *ABCDE*, e *GHIKL*, e tutti li triangoli congiunti al centro col medesimo angolo saranno simili, *ANB* a *GNH*, e *BNC* ad *HNI* &c. e li perimetri di tali poligoni, siccome sono proporzionali a' lati corrispondenti, *BA*, ed *HG*, così ancora sono come i raggi de' cerchj, cui sono inscritti, essendo per la similitudine de' triangoli *BA* · *HG* :: *AN* · *GN*. FIG. 137

III. Che però potendosi accrescere il numero, e diminuire la grandezza de' lati de' poligoni all' infinito, dovrà finalmente tal proprietà de' poligoni simili iscritti ne' cerchj verificarsi ancora delle circonferenze dei medesimi cerchj, che sono l' ultimo termine, nel quale vanno a finire i perimetri de' poligoni simili, moltiplicato che sia in infinito il numero de' lati, e in questa maniera le circonferenze de' cerchj si dimostrano proporzionali a i raggi loro, e a' diametri.

PROPOSIZIONE XVI.

I triangoli simili ABC, FGH *sono in duplicata ragione de' loro lati omologj*, AC, GH.

FIG. 138. SI faccia, come $AC \cdot GH :: GH \cdot CI$, che sarà la terza proporzionale, e si congiunga BI. Sarà il triangolo $BCI = FHG$ pel Coroll. 3. della Prop. XI. essendo gli angoli C, ed H uguali, ed i loro lati reciprochi, perchè essendo $BC \cdot FH :: AC \cdot GH$, ed $AC \cdot GH :: GH \cdot CI$, sono $BC \cdot FH :: HG \cdot CI$; dunque il triangolo ABC all'altro simile GFH è come ABC a BCI, cioè come la base AC alla base CI; ed è AC a CI in duplicata ragione di AC a GH, per la defin. 9. dunque i triangoli simili ABC, GFH sono in duplicata ragione de' lati omologj AC, e GH. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 139. I. Quindi ancora tutti i Poligoni simili $ABCDE$, $FGHIK$ dividendosi, per la prop. 15. in altrettanti simili triangoli, sono pure in duplicata ragione de' loro lati omologj, come sono tali triangoli; perchè essendo ABC ad FGH in duplicata ragione di BC a GH; e CAD ad HFI in ragione duplicata di CD ad HI (che è la medesima di BC a GH) ed ancora DAE ad IFK in ragione duplicata de' lati DE ad IK (che sono pure come CD ad HI), sono però tutti i triangoli del Poligono $ABCDE$ a tutti quelli dell'altro simile poligono $FGHIK$ in duplicata ragione de' lati omologj.

II. Ed

II. Ed essendo ancora i quadrati di qualsivoglia lato simili tra loro, sono pure in duplicata ragione di essi lati; onde i triangoli simili, ed i poligoni simili, ed ancora i cerchj essendo in duplicata ragione de' loro lati, o de' loro perimetri, o de' diametri, sono ancora in duplicata ragione de' quadrati fatti da' lati, o diametri de' Poligoni, o da' raggi de' circoli, o dalle loro circonferenze. TAV. IX.

III. Essendo in ogni triangolo rettangolo *BAC* FIG. 140. il quadrato della base *BC* uguale alli quadrati de' lati *AB*, *AC* (Coroll. I. Proposiz. 18. nella parte I.) ne segue, che ancora qualsivoglia figura *BHIC*, fatta sopra essa base *BC*, sarà uguale alle simili figure *BDEA*, *CGFA*, fatte sopra i lati *AB*, *AC* contenenti l' angolo retto, essendo tali figure simili, come i loro quadrati, o siano poligoni rettilinei, o circoli, o semicircoli, o settori simili di tali cerchj.

IV. Sopra la retta *BC* fatto un semicircolo, FIG. 141. ed a qualunque punto *A* congiunte le rette *BA*, *CA*, e sopra di esse fatti li semicircoli *BDA*, *CFA*, essendo l' angolo *BAC* retto, sarà il semicircolo *BHAIC* uguale alli due semicircoli *BDA*, *CFA*; e toltine gli spazj comuni *BHA*, *CIA*, saranno le due lunule *ADBHA*, *AFCIA* uguali al rimanente triangolo *BAC*; e se il punto *A* fosse nel mezzo della semicirconferenza, detti semicircoli sarebbero uguali, avendo pure le rette *BA*, ed *AC* uguali, e li segmenti *BHA*, *CIA* sarebbero uguali, onde ancora le lunule essendo uguali, sarebbe ciascheduna uguale alla metà del triangolo *BAC*.

PROPOSIZIONE XVII.

Nel triangolo ABC *condotta dal vertice* A *la retta* AD *ſopra la baſe* BC, *o al di dentro, o al di fuori di eſſo triangolo, ſarà* BD *a* DC *in ragione compoſta de' lati* AB, *ed* AC, *e del ſeno dell' angolo* BAD *al ſeno dell' angolo* CAD, *li quali ſeni ſono le perpendicolari, condotte da qualunque punto di eſſa retta* AD *ſopra i lati* AB, AC.

FIG. 142. IMperocchè dal punto *D* tirate eſſe perpendicolari *DE*, *DF* ſopra i lati del triangolo, è manifeſto, eſſere *BD* a *DC*, come il triangolo *BAD* al triangolo *DAC*, che hanno la medeſima altezza; dunque ſono in ragione compoſta delle *AB*, ed *AC*, che ſono loro baſi, e dell' altezze *DE*, *DF* di tali triangoli; ma tali perpendicolari *DE*, *DF* ſono i ſeni particolari degli angoli *BAD*, *CAD*, eſſendo *AD* il ſeno totale oppoſto all' angolo retto, che ſarebbe un raggio del cerchio deſcritto per lo centro *A*; dunque *BD* a *DC* è in ragione compoſta de' lati *AB*, *AC*, e de' ſeni dagli angoli *BAD*, *CAD*; Il che dovea dimoſtrarſi.

COROLLARJ.

I. Se la retta *AD* divide pel mezzo l'angolo interno *BAC*, o l'eſterno *CAE*, i loro ſeni *DE*, *DF* ſaranno uguali; però *BD* a *DC* ſarà ſolamente, come il lato *AB* al lato *AC*.

II. E ſe i lati *AB*, *AC* foſſero uguali, ſarebbe *BD* a *DC* ſolamente, come il ſeno dell' angolo *BAD* al ſeno dell' angolo *DAC*.

III. Quindi vicendevolmente, se fosse *BD* a *DC*, come il lato *AB* al lato *AC*, la retta *AD* dividerebbe pel mezzo l'angolo interno *BAC*, o l'esterno *CAE*, e se fossero *BD* . *DC* :: *DE* . *DF*, cioè come i seni degli angoli opposti, sarebbero i lati *AB*, ed *AC* uguali.

IV. Se in un triangolo *ABC* si dividono pel mezzo l'angolo *A* con la retta *AD*, e l'angolo *C* con la retta *CH*, le quali rette convengano in *G*, congiunta la *BGI*, taglierà pel mezzo l'altro angolo *B*, perchè essendo *AB* . *AC* :: *BD* . *DC*; e permutando *AB* . *BD* :: *AC* . *DC*; ed *AC* . *DC* :: *AG* . *GD*, essendo l'angolo *ACD* diviso pure pel mezzo dalla *CGH*, dunque *AB* . *BD* :: *AG* . *GD*; dunque ancora l'angolo *ABD* è diviso pel mezzo dalla *BGI*; onde le rette seganti pel mezzo tutti gli angoli d'un triangolo convengono insieme nel medesimo punto *G*. FIG. 143.

PROPOSIZIONE XVIII.

Se la retta AD *tocca il cerchio* EDB *nel punto* D, *condotta la perpendicolare* DG *sopra il diametro* AECB, *tutte le linee condotte da' punti* A, *e* G *a qualsivoglia punto* F *della circonferenza, come* AF, e GF, *sono proporzionali alle stesse parti* AE, ed EG. FIG. 144.

IMperocchè condotti dal centro i raggi *CD*, *CF*; essendo l'angolo *ADC* retto, è *AC* . *CD* :: *CD* . *CG*; dunque ancora sono proporzionali *AC* . *CF* :: *CF* . *CG*; onde il triangolo *ACF*, e l'altro *FCG* sono simili, aven-

do intorno all' angolo medesimo C i lati proporzionali, però l'angolo $CAF = CFG$; ed è l'angolo $CFE = CEF = EAF + AFE$; dunque $CFG + GFE = EAF + AFE$; ed essendo $CFG = EAF$, sarà pure $GFE = AFE$; dunque l'angolo AFG è diviso pel mezzo dalla retta FE; e però $AF \cdot FG :: AE \cdot EG$, in qualunque punto siano condotte le rette alla periferia circolare dalli due punti A, G. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

FIG. 145. I. Essendo ancora $AD \cdot DG :: AF \cdot FG$, il rettangolo di AD in GF è uguale al rettangolo di AF in DG, ed ancora tirate altre due linee dagli stessi punti A, G ad un altro punto H della circonferenza, essendo ancora queste $AH \cdot GH :: AF \cdot FG$, sarà pure il rettangolo dell' estreme uguale al rettangolo delle mezzane, cioè AH in $FG = GH$ in AF.

II. Essendo ancora le porzioni del diametro $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$, dicesi questa *Proporzione Armonica*; essendo delle tre linee AB, EB, GB, la prima alla terza, come la differenza della prima dalla media alla differenza della media dalla terza; in cui ancora permutando $AB . AE :: BG \cdot GE$, cioè delle tre linee BA, GA, EA la prima alla terza è come l'eccesso della prima dalla seconda all' eccesso della seconda dalla terza; e quella linea di mezzo dicesi *Media Armonica*.

PRO-

PROPOSIZIONE XIX.

Essendo la linea A B *divisa ne' punti* E, G *armonicamente, preso fuori qualunque punto* D, *e da esso condotte le rette* DA, DE, DG, DB, *qualunque altra linea, che tra esse si tiri* MOKN, *sarà essa pure armonicamente divisa, cioè ancora* MN · NK :: MO · OK. FIG. 146.

SI tiri per lo punto G la retta FGH parallela a DA, concorrente con le rette DB, DE in H, F, sarà $GH = GF$; perchè essendo simili li triangoli ABD, e BHG; ed ancora simili AED, GEF; dunque $AD \cdot GH :: AB \cdot BG :: AE \cdot EG :: AD \cdot GF$; dunque $GH = GF$; e per lo punto K tirata un altra IKL parallela ad AD, ed altresì ad FGH, sarà ancora $IK = KL$; dunque $DM \cdot KL :: DM \cdot KI$; ma essendo simili pure i triangoli DMN, LKN, e gli altri due DMK, IKO, sarà pure $MN \cdot NK :: DM \cdot KL :: DM \cdot KI :: MO \cdot OK$; dunque ancora la retta MN è divisa dall' istesse rette armonicamente, essendo $MN \cdot NK :: MO \cdot OK$. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Se le rette AM, EO, GK, BL non convenissero in un punto D, ma fossero tra loro parallele, è manifesto, che qualunque altra retta $MOKN$, segata da esse, sarà divisa armonicamente, essendo nella stessa proporzione AB, ed MN segate da esse parallele, cioè $AB \cdot BG :: MN \cdot NK$; ed $AE \cdot EG :: MO \cdot OK$; onde FIG. 147.

sic-

ſiccome $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$, così pure $MN \cdot NK :: MO \cdot OK$.

FIG. 148. II. Volendo ſegare armonicamente una retta AB, fattoci ſopra un triangolo ADB, e per qualſivoglia punto G condotta la retta GH parallela ad AD, e prolungatala in F, di maniera, che ſia $GF = GH$, congiunta DF, che ſeghi la baſe AB in E, ſarà AB armonicamente diviſa, perchè $AD \cdot GH :: AD \cdot FG$; ed è $AD \cdot GH :: AB \cdot BG$; ed $AD \cdot GF :: AE \cdot EG$; dunque $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$.

FIG. 149. III. In un triangolo ADG diviſo pel mezzo l'angolo interno ADG con la retta DE, e l'eſterno GDC diviſo pure pel mezzo con la retta DB, ſarà diviſa la retta $AEGB$ armonicamente, perchè ſarà tanto AB a BG, come i lati AD a DG, quanto AE ad EG, come i ſuddetti lati, pel Coroll. I. della Prop. 17. dunque $AB \cdot BG :: AE \cdot EG$: Ove ſi avverta, che l'angolo EDB ſarà retto, eſſendo la ſomma degli angoli $EDG + GDB$ uguale alli rimanenti $ADE + BDC$, e però eſſo angolo EDB è la metà della ſomma degli angoli fatti in D ſopra la retta AC, li quali eſſendo uguali a due retti, biſogna che la loro metà EDB ſia pure un angolo retto.

PROPOSIZIONE XX.

FIG. 150. *In qualſivoglia quadrilatero iſcritto nel cerchio il rettangolo contenuto da' ſuoi diametri* AC, *e* BD, *è uguale alli due rettangoli fatti dai lati oppoſti*, AB *in* DC, *ed* AD *in* BC.

Fac-

Facciasi l' angolo ABE uguale a DBC; essendo ancora l' altro angolo $BAE = BDC$, sono simili essi triangoli BAE, BDC, onde $BA \cdot AE :: BD \cdot DC$, ed il rettangolo AB in DC è uguale al rettangolo di BD in AE; similmente l' angolo CBE sarà uguale all' angolo ABD, essendo DBE comunemente aggiunto agli uguali angoli DBC, e ABE; onde ancora il triangolo BCE sarà simile al triangolo BDA, essendovi pure uguali gli angoli BCE, BDA; dunque $BC \cdot CE :: BD \cdot DA$, e però il rettangolo AD in BC è uguale al rettangolo BD in CE; dunque BD in $AE + BD$ in CE, cioè BD in AC $= AB$ in DC, $+ AD$ in BC. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Se le corde AD, DC sono uguali, e così pure gli archi, e gli angoli ABD, DBC, segandosi i diametri del quadrilatero in E, sarà BD in $AE = AB \times DC = BAD$; e DB in CE $= AD \times BC = DCB$; sicchè in tali triangoli BAD, BCD il rettangolo de' lati è uguale al rettangolo della base in quella porzione di linea, dal loro vertice alla base proposta, cioè BAD $= BD \times AE$, e $BCD = BD \times CE$. FIG. 151.

II. Essendo pure ivi $AC \times BD = AD \times BC$ $+ DC \times AB$, cioè $= AD$ in $BC + BA$; dunque $AD \cdot AC :: DB \cdot CB + AB$.

III. Onde preso un altro punto b, e tirate le corde Cb, Ab, Db, sarà pure $AD \cdot AC :: Db$ $\cdot Cb + Ab$; dunque qualsivoglia retta DB alla somma delle due corde CB, AB è nella stessa proporzione, in cui un altra retta Db è alla som-

ſomma delle corde Cb, Ab, quando l' arco ADC è diviſo pel mezzo in D.

IV. Se poi foſſe ancora $AD = AC$, cioè quando il triangolo inſcritto nel cerchio foſſe equilatero, ſarebbe pure qualunque media DB uguale alla ſomma dell' eſtreme $CB + AB$, e così pure $Db = Cb + Ab$.

PROPOSIZIONE XXI.

FIG. 152. *Nel triangolo* ADG *diviſo pel mezzo l' angolo interno* GDA *colla retta* DE, *ed ancora l' eſterno* GDC *colla retta* DB, *la quale converrà colla baſe* AG *prolungata in* B, *purchè le rette* AD, *e* DG *non ſiano uguali, ſarà il rettangolo* ADB *uguale al rettangolo* AEG *col quadrato* DE; *ed ancora uguale al rettangolo* ABG, *detrattone il ſuo quadrato* DB.

IMperocchè circoſcritto il cerchio $AFGH$ intorno al dato triangolo ADG, e prodotte le rette DE, BD nella ſua periferia in F, ed H, ſi congiungano le rette AF, AH. Primieramente circa la diviſione dell' angolo interno ADG, ſi averà il triangolo ADF ſimile all' altro GDE, per eſſere uguali gli angoli ADF, GDE; ed ancora gli altri due AFD, EGD; però ſarà $FD \cdot DA :: GD \cdot DE$; dunque ſarà il rettangolo $ADG = FDE$, cioè $= FED + DE$, che è il rettangolo $FED = AEG$, onde il rettangolo de' lati AD, e DG uguaglia il rettangolo delle parti della baſe AE, ed EG, col quadrato della retta DE, che divide pel mezzo l' angolo interno ADG. Secondariamente, circa la diviſione dell'

an-

angolo esterno GDC colla retta DB in due parti uguali, sarà pure il triangolo ADH simile all' altro BDG, per essere l'angolo $ADH = BDC = BDG$, e l'angolo $AHD = BGD$, perchè tanto questo, che quello con l'angolo AGD comprende due retti (come si è dimostrato nella parte prima Prop. 14. Coroll. 2. che il quadrilatero inscritto nel cerchio, come $AHDG$, ha gli due angoli opposti H, e G uguali a due retti) dunque sono $AD \cdot DH :: BD \cdot DG$, e però $ADG = BDH = HBD - BD^2$; ed è $HBD = ABG$; dunque $ADG = ABG - BD^2$, onde il rettangolo de' lati ADG è uguale al rettangolo ABG, detrattone il quadrato DB, come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

Quindi il rettangolo ADG col quadrato DB sarà uguale al rettangolo ABG; ed ADG, meno il quadrato $DE = AEG$.

PROPOSIZIONE XXII.

Essendo inscritto nel cerchio il triangolo equilatero BCA, *da' punti* B, A, C *a qualunque punto* F *della periferia condotte le rette* BF, AF, CF, *i loro quadrati saranno sempre uguali alli due quadrati di* AB, *ed* AC. FIG. 153.

SI tiri il diametro AG, segante il lato BC in E, e si congiungano EF, GF, e si tiri EH perpendicolare ad AF, che sarà parallela a GF, per essere ancora retto l'angolo GFA; onde $FH = \frac{1}{4} FA$, siccome $GE = \frac{1}{4} AG$, perciò due rettan-

tangoli AFH sono uguali al rettangolo di AF, nella sua metà, cioè al quadrato AF diviso pel mezzo; onde essendo il quadrato $AE^2 = AF^2 + EF^2 - 2\ AFH$, sarà perciò $AE^2 = EF^2 + \frac{1}{2}\ AF^2$; e duplicandolo, sarà $2\ AE^2 = 2\ EF^2 + AF^2$; ed aggiuntivi due quadrati di EB, sarà $2\ EB^2 + 2\ AE^2 = 2\ EF^2 + AF^2 + 2\ EB^2$; ma $2\ EF^2 + 2\ EB^2 = BF^2 + CF^2$ (come si è detto nella parte prima Prop. 23) dunque $2\ EB^2 + 2\ AE^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2$; ed è $AB^2 + AC^2 = 2\ AB^2 = 2\ AE^2 + 2\ EB^2$; dunque li tre quadrati $AF^2 + BF^2 + CF^2 = AB^2 + AC^2$; e però a qualunque punto F siano le rette congiunte da' punti A, B, C, fanno sempre li tre quadrati uguali alli quadrati de' lati AB, ed AC; come dovea dimostrarsi.

COROLLARIO.

Quindi ancora il quadrato AF, col doppio quadrato EF, è sempre uguale a' due quadrati AE, dovunque sia il punto F, perchè $2\ AE^2 + 2\ BE^2 = AB^2 + AC^2 = AF^2 + BF^2 + CF^2 = AF^2 + 2\ EF^2 + 2\ BE^2$, dunque $2\ AE^2 = AF^2 + 2\ EF^2$

DISSERTAZIONE

Delle Proporzioni, che si notano nella mia Tavola Analogica.



PReso qualunque angolo BAC, da' termini de' suoi lati B C si tirino le rette BE, CD a qualsivoglia punto del lato opposto, tal quale o rimanga, o sia prodotto l'uno, o l'altro, o ambidue al di sotto, o al di sopra, come si vede in quelle dodici figure, ivi ne rimangono le stesse proporzioni assegnate in essa Tavola. le quali sono sessantasei, per il paragone di esse linee intiere, e loro parti, che sono dodici, cioè (concorrendo esse rette BE, CD in F, non ponendole parallele) riescono AB, AC, BE, CD, AD, DB, BF, EF, AE, CE, CF, DF, di cui ciascuna può essere paragonata a qualunque dell'altre. TAV. X.

Nell' Almagesto di Ptolomeo solamente sei proporzioni si dimostrano delle parti di qualsivoglia retta, o al più delle intiere loro parti, il che da altri Matematici è stato proposto con diciotto proporzioni, e non l'altre, che da me si variano in tante maniere; e solamente da essi fu osservato il caso della figura prima; cioè quando le rette BE, CD *concorrano dentro le* AC, AB, *non prodotte al di sotto, o al di sopra; ma da me in* 12 *figure diversi altri casi si propongono, e pure ciascuna in qualunque figura ha la medesima proporzione, come sarà da me dimostrato.*

Però

Però in quattro maniere si pongono tali proporzioni. La prima si vede nelli sei rombi in mezzo di essa Tavola, in cui si paragonano le rette opposte ad un quadrilatero in qualche figura, cioè AD, EF, *ed* AE, DF *nelle figure* 1, 7, 9, 11; *ed ancora* AB, CF, *ed* AC, BF *nell' altre* 2, 8, 10, 12; *e finalmente* BE, DC, *e* BD, CE *nell' altre figure* 3, 4, 5, 6: *Benchè in altre figure siano esse rette diversamente poste, da per tutto però devono avere le stesse proporzioni, che ivi sono duplicate di un rettangolo ad un altro. Per esempio* AB *a* CF *tanto ha la proporzione di* AD *in* BE *ad* EF *in* CD, *quanto ancora quella di* AE *in* BD *a* DF *in* CE; *e così gli altri hanno pure le due proporzioni, riposte ivi in essa Tavola.*

TAV. XI. *Per dimostrare, che gli corrispondano tali proporzioni, si tiri in tutte le dodici figure la retta* AH *parallela a* CF, *e conveniente con* BFE *in* H, *la quale nelle prime sei figure prolungasi fuori, e non nelle sei altre; come ancora conducasi la* FG *parallela ad* AB, *concorrente con* AE *in* G, *la quale non si prolunga nelle figure* 1, 2, 7, 8, 9, 10, *ma bensì nell' altre. Ciò posto, essendo* AB . AH :: BD . DF; *ed* AH . CF :: AE . CE *in ciascuna figura, sarà dunque in tutte* $AB \mid CF \left\| \begin{matrix} AE \\ BD \end{matrix} \right| \begin{matrix} DF \\ CE \end{matrix}$; *ed essendo pure* AB . FG :: BE . EF, *ed* FG . CF :: AD . CD, *sarà ancora* $AB \mid CF \left\| \begin{matrix} AD \\ BE \end{matrix} \right| \begin{matrix} EF \\ CD \end{matrix}$. *In due maniere dunque si ha la proporzione di* AB *a* CF, *cioè nella prima è come il rettangolo di* AE *in* BD, *al rettan-*

golo

golo di CE *in* DF, *e nella seconda rimane pure, come il rettangolo di* AD *in* BE *a quello di* EF *in* CD.

Parimente essendo $BF \cdot FH :: BD \cdot AD$, *ed* $FH \cdot AC :: EF \cdot CE$, *sarà pure* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \mid \frac{AD}{CE}$, *che sarà la sua prima proporzione; ma è ancora* $BF \cdot AG :: BE \cdot AE$, *ed* $AG \cdot AC :: DF \cdot CD$; *dunque la seconda sua proporzione è* $BF \mid AC \mid \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$. *In oltre da queste proporzioni se ne cavano dell' altre, cioè da quella* $AB \mid CF \parallel \frac{AD}{BE} \mid \frac{EF}{CD}$ *sarà pure* $AD \mid EF \parallel \frac{AB}{CD} \mid \frac{CF}{BE}$, *e dalla* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \mid \frac{AD}{CE}$, *si cava la seconda* $AD \mid EF \parallel \frac{AC}{BD} \mid \frac{BF}{CE}$; *e similmente da* $AB \mid CF \mid \frac{AD}{BE} \mid \frac{EF}{CD}$ *se ne cava* $BE \mid CD \parallel \frac{AB}{EF} \mid \frac{CF}{AD}$; *ed ancora da* $BF \mid AC \parallel \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$ *sarà* $BE \mid CD \mid \frac{AE}{BF} \mid \frac{DF}{AC}$. *Parimente da* $AB \mid CF \parallel \frac{AE}{BD} \mid \frac{DF}{CE}$ *dovrà essere* $AE \mid DF \parallel \frac{AB}{CE} \mid \frac{CF}{BD}$; *e da* $BF \mid AC \parallel \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$, *si ha pure* $AE \mid DF \parallel \frac{AC}{BE} \mid \frac{BF}{CD}$; *ed ancora da* $AB \mid CF \mid \frac{AE}{BD} \mid \frac{DF}{CE}$ *si cava* $BD \mid CE \parallel \frac{AB}{DF} \mid \frac{CF}{AE}$, *e dalla* $BF \mid AC \parallel \frac{EF}{BD} \mid \frac{AD}{CE}$ *ne riesce* $BD \mid CE \parallel \frac{BF}{AD} \mid \frac{AC}{EF}$; *onde così tutte quelle rette, che in qualche figura si restano opposte ad un quadrilatero, ed in altre*

ſono diverſamente poſte, hanno le due ſimili proporzioni d' un rettangolo ad un altro, come ſi vede nelli ſei Rombi di mezzo della Tavola Analogica.

La ſeconda maniera delle proporzioni è di qualunque retta con una delle ſue parti, o con un altro lato in qualche triangolo, o d' una parte ad un altra, che inſieme ſi uniſcano, le quali saranno 24, *ed averanno una ſola proporzione d' un rettangolo ad un altro, e ſi cavano dalle proporzioni delle ſei prime, anzi dalle due ſole poſſono ridurſi. Per eſempio, eſſendoſi dimoſtrato, eſſere* $AB \mid CF \parallel \begin{array}{c|c} AE & DF \\ BD & CE \end{array}$ *ſi può cavarne* $AB \mid BD \parallel \begin{array}{c|c} AE & DF \\ CF & CE \end{array}$, *ed* $AB \mid AE \parallel \begin{array}{c|c} BD & CE \\ CF & DF \end{array}$, *ed* $AE \mid CE \parallel \begin{array}{c|c} AB & CF \\ DF & BD \end{array}$, *e* $CF \mid DF \parallel \begin{array}{c|c} CE & BD \\ AB & AE \end{array}$, *e* $CF \mid CE \parallel \begin{array}{c|c} DF & AE \\ AB & BD \end{array}$, *e* $BD \mid DF \parallel \begin{array}{c|c} AB & CF \\ CE & AE \end{array}$. *Similmente eſſendo* $AB \mid CF \parallel \begin{array}{c|c} AD & EF \\ BE & CD \end{array}$, *ſe ne cava* $AB \mid BE \parallel \begin{array}{c|c} AD & EF \\ CF & CD \end{array}$, *ed* $AB \mid AD \parallel \begin{array}{c|c} BE & CD \\ CF & EF \end{array}$, *ed* $AD \mid DC \parallel \begin{array}{c|c} AB & CF \\ EF & BE \end{array}$, *e* $CF \mid CD \parallel \begin{array}{c|c} EF & AD \\ AB & BE \end{array}$, *e* $CF \mid EF \parallel \begin{array}{c|c} CD & BE \\ AB & AD \end{array}$, *e* $BE \mid EF \parallel \begin{array}{c|c} AB & CF \\ CD & AD \end{array}$. *Parimente eſſendo* $BF \mid AC \parallel \begin{array}{c|c} EF & AD \\ BD & CE \end{array}$, *ſarà* $BF \mid BD \parallel \begin{array}{c|c} EF & AD \\ AC & CE \end{array}$, *ed* $EF \mid BF \parallel \begin{array}{c|c} CE & BD \\ AD & AC \end{array}$, *ed* $AC \mid CE \parallel \begin{array}{c|c} AD & EF \\ BF & BD \end{array}$

ed

ed $AC \mid AD \,\|\, \frac{CE}{BF} \mid \frac{BD}{EF}$, *ed* $AD \mid BD \,\|\, \frac{AC}{EF} \mid \frac{BF}{CE}$ *ed* $EF \mid CE \,\|\, \frac{BF}{AD} \mid \frac{AC}{BD}$; *ed essendo ancora* $BF \mid AC \,\|\, \frac{DF}{BE} \mid \frac{AE}{CD}$, *sarà pure* $BF \mid BE \,\|\, \frac{DF}{AC} \mid \frac{AE}{CD}$, *e* $BF \mid DF \,\|\, \frac{BE}{AC} \mid \frac{CD}{AE}$, *ed* $AC \mid AE \,\|\, \frac{CD}{BF} \mid \frac{BE}{DF}$, *ed* $AE \mid BE \,\|\, \frac{AC}{DF} \mid \frac{BF}{CD}$, *ed* $AC \mid CD \,\|\, \frac{AE}{BF} \mid \frac{DF}{BE}$, *e finalmente* $CD \mid DF \,\|\, \frac{AC}{BE} \mid \frac{BF}{AE}$; *e in tal modo si dimostrano tutti i casi, che si considerano nella seconda maniera.*

Circa poi la terza, si prendono due rette unite ad un angolo, cui non sia sottoposta la base, cioè queste dodici, AB · AC *ed* AB · BF, *e* BF · CF, *ed* AC · CF, *ed* AD · AE, *ed* AE · EF, *ed* EF · DF, *ed* AD · DF, *e* BD · CD, *e* CD · CE, *e* BD · BE, *e* BE · CE, *la di cui proporzione è di tre parti a tre altre, come sarebbe d' un rettangolo ad un altro, e di una ad un altra retta. Queste si trovano dalle doppie proporzioni della prima maniera; imperocchè essendo* $AB \mid CF \,\|\, \frac{AE}{BD} \mid \frac{DF}{CE}$, *ed* $\frac{AD}{BE} \mid \frac{EF}{CD}$ *sarà questa uguale a quella, e però il prodotto de' primi, e degli ultimi sarà uguale al prodotto de' medj, cioè* AE · BD · EF · CD *si uguaglia a* DF · CE · AD · BE; *però deve essere* $AD \mid AE \,\|\, \frac{BDC}{EF} \mid \frac{BEC}{DF}$, *e* $BE \mid BD \,\|\, \frac{AEF}{CD} \mid \frac{ADF}{CE}$, *e* $CE \mid CD \,\|\, \frac{AEF}{BD} \mid \frac{ADF}{BE}$, *e* $DF \mid EF \,\|\, \frac{BDC}{AE} \mid \frac{BEC}{AD}$;

Indi similmente, essendo $\mathrm{BE|CD}\left|\frac{\mathrm{BF|AC}}{\mathrm{AE|DF}}\right.$, *ed* $\left|\frac{\mathrm{AB|CF}}{\mathrm{EF|AD}}\right.$ *saranno pure uguali i prodotti di quattro in quattro, cioè* $\mathrm{AC\cdot DF\cdot AB\cdot EF = BF\cdot AE\ CF\cdot AD}$, *onde ne seguono* $\mathrm{AB|BF}\left\|\frac{\mathrm{DAE}}{\mathrm{CF}}\right|\frac{\mathrm{DFE}}{\mathrm{AC}}$, *ed* $\mathrm{AE|EF}\left|\frac{\mathrm{BAC}}{\mathrm{DF}}\right|\frac{\mathrm{BFC}}{\mathrm{AD}}$, *ed* $\mathrm{AD|DF}\left\|\frac{\mathrm{BAC}}{\mathrm{EF}}\right|\frac{\mathrm{BFC}}{\mathrm{AE}}$, *ed* $\mathrm{AC|CF}\left\|\frac{\mathrm{DAE}}{\mathrm{BF}}\right|\frac{\mathrm{DFE}}{\mathrm{AB}}$. *Finalmente, essendo* $\mathrm{AE|DF}\left\|\frac{\mathrm{AB|CF}}{\mathrm{CE|BD}}\right.$, *ed* $\left\|\frac{\mathrm{AC|BF}}{\mathrm{BE|CD}}\right.$, *restano uguali* $\mathrm{AB\cdot CE\cdot BF\cdot CD}$, *e* $\mathrm{CF\cdot BD\cdot AC\cdot BE}$; *onde ne riesce* $\mathrm{AB|AC}\left|\frac{\mathrm{DBE}}{\mathrm{CF}}\right|\frac{\mathrm{DCE}}{\mathrm{BF}}$, *e* $\mathrm{CE|BE}\left\|\frac{\mathrm{ACF}}{\mathrm{BD}}\right|\frac{\mathrm{ABF}}{\mathrm{CD}}$, *e* $\mathrm{BF|CF}\left\|\frac{\mathrm{DBE}}{\mathrm{AC}}\right|\frac{\mathrm{DCE}}{\mathrm{AB}}$, *e* $\mathrm{BD|CD}\left\|\frac{\mathrm{ABF}}{\mathrm{CE}}\right|\frac{\mathrm{ACF}}{\mathrm{BE}}$, *e così riescono tutte le proporzioni di questa terza maniera.*

Ma finalmente la quarta maniera delle proporzioni, che ha più parti da proporsi, cioè un quadrato ad un altro, ed un rettangolo ad un altro, ed una retta ad un' altra, ha pure 24. *proporzioni di quelle rette, che non convengono nello stesso punto, ne sono opposte in un rettangolo, ma disparate affatto l' una dall' altra, che tali sono* AB · CD, *ed* AB · EF, *ed* AB · DF; *ed* AB · CE, *e* BF · CD, *e* BF · AE, *e* BF · AD, *e* BF · CE, *e* AD · CE, *e* CE · DF, *e* BE · CF, *e* BE · AC, *e* BE · AD, *e* BE · DF, *e* DF · AC, *e* AD · CF, *ed* EF · AC, *ed* EF · BD, *ed* EF · CD, *e* AE · CF, *e* AE · BD, *e* AE · CD, *e* BD · CF, *e* AC · BD; *Ad esse para-*

ra-

ragonare si possono le loro proporzioni in questa maniera. *Tra le due* AB, CD *si interpongano* CF, *e* DF, *e si osservi essere* $AB \mid CF \,\Big\|\, \begin{array}{c:c} AE & DF \\ BD & CE \end{array}$, *e trapposte di quà, e di là* CF · DF, *si osservi ancora essere* $DF \mid CD \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} BF & AC \\ AE & BE \end{array}$; *dunque essendo*

$$\begin{array}{c|c} & \\ AB & CF \\ CF & FD \\ FD & CD \\ & \end{array} \Bigg\| \begin{array}{c|c} AE & DF \\ BD & CE \\ CF & DF \\ BF & AC \\ AE & BE \end{array} \text{ rimane } AB \mid CD \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DBF & ACE \\ CF & BE; \end{array}$$

onde ancora dovrà essere $BE \mid CF \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DBF & ACE \\ DC & AB; \end{array}$

ed $AC \mid BD \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DCF & ABE \\ BF & CE \end{array}$, *e* $CE \mid BF \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} AE^2 & DF^2 \\ DCF & ABE \\ BD & AC. \end{array}$

E similmente tra le due BF, AE *interposte* AC, *e* CE, *sarà* $BF \mid AC \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} EF & AD \\ BD & CE \end{array}$, *e trapposte di quà, e di là* AC · CE, *essendo* $CE \mid AE \,\Big\|\, \begin{array}{c|c} CF & AB \\ BD & DF, \end{array}$

ne risulta pure $BF \mid AE \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CFE & BAD \\ AC & DF \end{array}$; *onde pure*

$DF \mid AC \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CFE & BAD \\ AE & BF \end{array}$, *ed* $AB \mid FE \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CAE & BFD \\ CF & AD, \end{array}$

ed $AD \mid CF \,\Bigg\|\, \begin{array}{c|c} BD^2 & CE^2 \\ CAE & BFD \\ EF & AB \end{array}$. *Poscia tra le due* CE, AB

si frappongano BD, *e* AD, *sarà* CE|BD $\left\| \begin{array}{c|c} AC & BF \\ EF & AD \end{array} \right.$, *e ritenuto di quà, e di là* BD · AD, *ed essendo* AD|AB $\left\| \begin{array}{c|c} CD & BE \\ EF & CF \end{array} \right.$, *riuscirà* CE|AB $\left\| \begin{array}{c|c} EF^2 & AD^2 \\ ACD & EBF \\ BD & CF \end{array} \right.$, *onde pure* CF|BD $\left\| \begin{array}{c|c} EF^2 & AD^2 \\ ACD & EBF \\ AB & CE \end{array} \right.$, *e* BE|AC $\left\| \begin{array}{c|c} EF^2 & AD^2 \\ ABD & ECF \\ CD & BF \end{array} \right.$, *e* BF|CD $\left\| \begin{array}{c|c} EF^2 & AD^2 \\ ABD & ECF \\ AC & BE \end{array} \right.$.

Parimente tra le due BE, DF *interposti* CD·CF, *sarà* BE|CD $\left\| \begin{array}{c|c} AB & CF \\ EF & AD \end{array} \right.$, *e ritenuto di quà, e di là* CD · CF, *essendo pure* CF|DF $\left\| \begin{array}{c|c} CE & BD \\ AB & AE \end{array} \right.$, *ne riesce* BE|DF $\left\| \begin{array}{c|c} AB^2 & CF^2 \\ CEF & ADB \\ CD & AE \end{array} \right.$; *ed* AE|CD $\left\| \begin{array}{c|c} AB^2 & CF^2 \\ CEF & ADB \\ DF & BE \end{array} \right.$, *e* AD|CE $\left\| \begin{array}{c|c} AB^2 & CF^2 \\ CDF & AEB \\ EF & BD \end{array} \right.$, *e* BD|EF $\left\| \begin{array}{c|c} AB^2 & CF^2 \\ CDF & AEB \\ CE & AD \end{array} \right.$.

In oltre interposte alle due DF, CE *le rette* AE, AC, *sarà* DF|AE $\left\| \begin{array}{c|c} BF & AC \\ CD & BE \end{array} \right.$; *e ritenuto di quà, e di là* AE·AC, *essendo pure* AC|CE $\left\| \begin{array}{c|c} AD & EF \\ BF & BD \end{array} \right.$ *ne riesce* DF|CE $\left\| \begin{array}{c|c} BF^2 & AC^2 \\ ADC & BEF \\ AE & BD \end{array} \right.$, *onde* BD|AE $\left\| \begin{array}{c|c} BF^2 & AC^2 \\ ADC & BEF \\ CE & DF \end{array} \right.$, *ed* EF|CD $\left\| \begin{array}{c|c} BF^2 & AC^2 \\ AEC & BDF \\ AD & BE \end{array} \right.$, *e* BE|AD $\left\| \begin{array}{c|c} BF^2 & AC^2 \\ AEC & BDF \\ CD & EF \end{array} \right.$.

Finalmente tra AD, *e* BF *interposti* EF, BE, *sarà pure* $AD \mid EF \,\|\, \begin{matrix}AC\\BD\end{matrix} \Big| \begin{matrix}BF\\CE\end{matrix}$, *e ritenuto di quà, e di là* EF · BE, *essendo poi* $BE \mid BF \,\|\, \begin{matrix}AEDF\\CDAC\end{matrix}$, *ne risulta* $AD \mid BF \,\|\, \begin{matrix}CD^2\\BAE\\EF\end{matrix} \Big| \begin{matrix}BE^2\\CFD\\AC\end{matrix}$; *onde* $AC \mid EF \,\|\, \begin{matrix}CD^2\\BAE\\BF\end{matrix} \Big| \begin{matrix}BE^2\\CFD\\AD\end{matrix}$, *e* $CF \mid AE \,\|\, \begin{matrix}CD^2\\BFB\\AB\end{matrix} \Big| \begin{matrix}BE^2\\CAD\\DF\end{matrix}$, *e* $DF \mid AB \,\|\, \begin{matrix}CD^2\\BFE\\AE\end{matrix} \Big| \begin{matrix}BE^2\\CAD\\CF\end{matrix}$; *onde tutte sono dimostrate, e ben disposte nella Tavola Analogica, in cui può osservarsi, come si corrispondono i quadrilateri dal mezzo ugualmente lontani, con molte parti uguali; e l' ultime corrispondenti alle opposte rette, cui corrispondono l' altre proporzioni.*

Può ancora osservarsi, che in queste figure, se vi fossero due rette, o due parti uguali, le altre, che siano proporzionali con esse, averanno proporzione meno composta. Per esempio, se fosse BD = CE, *sarebbero* AE *in* CF = DF *in* AB, *ed* EF *in* AC = AD *in* BF, *onde* AB · AE :: CF · DF, *ed* AC · AD :: BF · EF, *ed* $AE \mid AE \,\|\, \begin{matrix}DC\\EF\end{matrix} \Big| \begin{matrix}BE\\DF\end{matrix}$, *ed* $AE \mid CD \,\|\, \begin{matrix}AB^2\\DFE\end{matrix} \Big| \begin{matrix}CF^2\\AD \times BE\end{matrix}$, *e così troverassi in molte altre proporzioni. Così ancora se fosse* AB = AC, *sarebbe* BF | CF || DBE | DCE, *e* $BF \mid AE \,\|\, \begin{matrix}BE^2\\CFE\end{matrix} \Big| \begin{matrix}CD^2\\ADF\end{matrix}$ *e* $BF \mid AD \,\|\, \begin{matrix}BE^2\\CFD\end{matrix} \Big| \begin{matrix}CD^2\\AEF\end{matrix}$ *ec.* *Il che potrà ricavarsi da altre parti, cavandone proporzioni più semplici di quelle poste in essa Tavola Analogica.*

Finalmente si può dimostrare nell' altre dodici figure, cioè dalle 13. *alle* 24., *che tirata la retta* BC, *e la retta* DE, *e la retta* AF, *le quali* (*se non riuscissero parallele*) *converranno insieme*; *cioè* AF *con* BC *in* G, *e con* DE *in* H, *ed ancora* BC *con* DE *in* I, *onde armonicamente disposte riesciranno*, *cioè* BG · GC :: BI · IC, *e parimente* DH · HE :: DI · IE, *ed* AH · HF :: AG · GF, *essendo ancora proporzionali i triangoli* DAE · DFE :: BAC · BFC, *ed altri, di cui parleremo; e può ciò dimostrarsi colle proporzioni della terza maniera, poste nella medesima Tavola Analogica: cioè essendo* AC | CF ‖ $\frac{DAE}{BF}$ | $\frac{DFE}{AB}$, *sarà il prodotto delle quattro rette* DF · FE · AB · AC *uguale a quello dell'altre quattro* DA · AE · BF · CF; *dunque li rettangoli* BAC · DAE :: BFC; *ed avendo li triangoli* BAC, *e* DAE *il medesimo angolo, riescono proporzionali ad essi rettangoli, e così pure li triangoli* BFC, *e* DFE *avendo uguali angoli in* F, *sono parimente proporzionali a' medesimi rettangoli*; *onde li triangoli* BAC · DAE :: BFC · DFE, *e permutando* BAC · BFC :: DAE · DFE; *ma* BAC *a* BFC, *avendo la stessa base* BC, *sono come l' altezze loro* AG, *e* GF; *ed ancora* DAE, *e* DFE, *sopra la stessa base* DE, *sono come le loro altezze* AH, *ed* HF; *dunque sono proporzionali* AG · GF :: AH · HF, *ed* AG · AH :: GF · HF; *sicchè armonicamente è divisa* AG *in* H, F *in qualsivoglia delle dette figure*.

Così pure essendo BA | AC ‖ $\frac{DBE}{CF}$ | $\frac{DCE}{BF}$, *sarà*

pure

pure DCE in ABF uguale a DBE in ACF, onde ſono proporzionali i rettangoli, ed ancora i triangoli compoſti da DBE · ABF :: DCE · ACF; e permutando, ſaranno pure i triangoli DBE · DCE :: ABF · ACF; ma tirata ſopra DE la CK parallela a BD, ſarà DBE a DCE, come la retta BD alla CK, avendo ambidue la ſteſſa baſe DE, e l'altezze proporzionali alle rette BD, CK parallele; ma BD · CK :: BI · IC; ed ancora ABF ad ACF è come BG a GC, ſopra la ſteſſa baſe AF de' medeſimi triangoli; dunque ſiccome tali triangoli ſono proporzionali, parimente BI · IC :: BG · GC, e BI · BG :: IC · GC, ſicchè eſſa BI è diſpoſta armonicamente in C, e G, in qualunque figura.

Eſſendo ancora $DA \mid AE \parallel \frac{BDC}{EF} \mid \frac{BEC}{DF}$, ne rieſce pure BEC in ADF, uguale a BDC in AEF, onde BDC · ADF :: BEC · AEF, tanto i rettangoli, quanto i triangoli, di cui permutando ſarà pure BDC · BEC :: ADF · AEF; ed avendo i due primi la ſteſſa baſe BC, ſono come le loro altezze, onde tirata EL parallela a DB, ſarà BDC · BEC :: DB · EL, cioè come DI ad IE; e gli altri due triangoli avendo la ſteſſa baſe AF, e l'altezze proporzionali alle rette DH · HE, ſaranno pure ADF · AEF :: DH · HE; e perciò armonicamente ſi trova DI · IE :: DH · HE, e DI · DH :: IE · HE, in qualſivoglia figura.

E tanto baſti di avere dimoſtrato in queſta Diſſertazione, benchè molte altre coſe potevanſi ricavare; e principalmente può oſſervarſi, che ſe le

rette

rette BE, CD *perpendicolarmente fossero tirate a i lati opposti* AC, AB, *riuscendo simili tutti li triangoli rettangoli* BAE, CAD, BDF, CEF, *la proporzione di qualunque retta ad un altra, riesce o tripla d' una parte ad un altra parte, o dupla almeno di esse, o ancora dupla d' un rettangolo ad un altro, come può vedersi in quest' altra Tavola delle rette perpendicolari a' lati, ove ne riescono quattro figure diverse. In fatti, prendendo i lati di alcuno Triangolo, ne averanno tre proporzioni di una linea ad un altra, per esempio* AB *a* BE, *sarà come* AC *a* CD, *ed ancora come* BF *a* BD, *ed altresì come* CF *a* CE; *e così pure* AB *ad* AE, *sarà come* AC *ad* AD, *e come* BF *a* DF, *e finalmente come* CF *ad* EF; *e simili proporzioni ne averanno gli altri: per esempio sarebbe* AC *a* CD *in ragione di* AB *a* BE, *e di* BF *a* BD, *e di* CF *a* CE *&c. onde se ne veggono dodici in essa Tavola delle rette perpendicolari al suo angolo.*

Da queste medesime se ne cavano diciotto proporzioni duple d' una retta ad un altra. Cioè essendo AB *a* BE, *come* AC, *e* CD, *permutando, sarà* AB *ad* AC, *come* BE *a* CD; *ed essendo pure* AB *ad* AE, *come* AC *ad* AD, *sarà ancora* AB *ad* AC, *come* AE *alla* AD, *onde vi è a questi* AB · AC :: BE · CD :: AE · AD, *che sono due simili proporzioni, e così dalle prime proporzioni terze de' lati a qualche triangolo rettangolo, se ne trovano quest' altre duple proporzioni dell' altre rette, che si vedranno appartenenti in essa medesima Tavola.*

Poscia le altre trentasei proporzioni hanno due ma-

maniere d' un rettangolo ad un altro ; rimanendosi però alcune rette della prima maniera, e quelle della seconda: Cioè sarebbe AE *a* CD *in ragione di* AE *a* BE, *e di* BE *a* CD, *ed essendo* AE *a* BE *in ragione di* DF *a* BD, *ed ancora di* BF *a* CE (*non prendendo l'altra di* AD *a* CD, *per avere in se il* CD) *ed il* BE *a* CD, *essendo come* AB *ad* AC (*lasciando l'altra di* AE *ad* AD, *per avere in se quella* AE) *perciò la* AE *a* CD, *sarà in ragione di* AB *ad* AC, *e di* DF *a* BD, *ed ancora in ragione di esse* AB *ad* AC, *e di* EF *a* CE; *dunque due proporzioni si averanno* $AE \mid CD \parallel \frac{AB}{DF} \mid \frac{AC}{BD} \parallel \frac{AB}{EF} \mid \frac{AC}{CE}$; *e così le altre parimente si troveranno, come potrà vedersi in essa Tavola, in cui tutte le due proporzioni d'un rettangolo ad un altro ci si mantengono in ambidue le due medesime rette, come* $BE \mid CF \parallel \frac{AE}{CD} \mid \frac{EF}{AC} \parallel \frac{AE}{BD} \mid \frac{EF}{BF}$; *e così pure* $AD \mid CE \parallel \frac{AC}{AF} \mid \frac{CF}{BE} \parallel \frac{AC}{DF} \mid \frac{CF}{BD}$; *e così nel medesimo modo troveransi le altre; Laddove, se le rette* BE, CD *non fossero a' lati dell' angolo* AC, AB *perpendicolari, le proporzioni nell' altra Tavola Analogica sono di più rette composte: per esempio* $AE \mid CD \parallel \begin{matrix} AB^2 \\ CEF \\ DF \end{matrix} \mid \begin{matrix} CF^2 \\ ADB, \\ BE \end{matrix}$ *e* $BE \mid CF \parallel \begin{matrix} AE^2 \\ DBF \\ CD \end{matrix} \mid \begin{matrix} DF^2 \\ ACE, \\ AB \end{matrix}$ *ed ancora* $AD \mid CE \parallel \begin{matrix} AB^2 \\ CDF \\ EF \end{matrix} \mid \begin{matrix} CF^2 \\ AEB; \\ BD \end{matrix}$ *e così negli altri della quarta maniera ivi posta, e quelli ancora della maniera terza, che hanno la proporzione di*

tre

tre rette a tre altre, come AE | AD *ivi* ‖ CEB / DF | BDC / EF, *in quest' altra Tavola* AE · AD :: AB · AC :: BE · CD; *e però l'essere tali rette perpendicolari a i lati dell' angolo, ne riescono con maggiori numeri di proporzioni più piccole. E tanto basti.*

INSTITUZIONI GEOMETRICHE

PARTE TERZA.

DEFINIZIONI.

I. Diceſi la retta *AB* perpendicolare al piano *CDE*, quando fa angoli retti con tutte le linee *KL*, *GF*, *HI*, &c. condotte in detto piano pel medeſimo punto *B*, in cui cade eſſa *AB* perpendicolare. TAV. XII. FIG. 154.

II. La retta *AF* diceſi inclinata allo ſteſſo piano *CDE* ſecondo l'angolo acuto *AFB*, che contiene con la retta *BF* tiratagli dal punto *B*, in cui dal medeſimo punto *A* cade la *AB* perpendicolare allo ſteſſo piano. FIG. 155.

III Il piano *EGHI* diceſi perpendicolare al piano *CDE*, ſe le rette *EG*, *AB*, *IH* perpendicolari alla comune ſezione *HG* di queſti piani, ſono ancora al ſoggetto piano *CDE* perpendicolari. FIG. 156.

IV. Ma l'altro piano *EKLI* è inclinato al piano *CDE* ſecondo l'angolo acuto *AFB*, compreſo dalle rette *AF*, *FB* perpendicolari alla comune ſezione *KL*, quella in un piano, e queſta in un altro.

V. I piani ſono tra loro paralleli, ſe prolungati in infinito, verſo qualunque parte, mai convengono inſieme.

VI.

FIG. 157. VI. Angolo solido si dice quello, che resta contenuto da più linee *AD*, *AC*, *AB*, tirate dallo stesso punto *A*; ma non poste nel medesimo piano.

FIG. 158. VII. Dicesi *Piramide* quel solido, che da qualunque base, o triangolare *BDC*, o quadrangolare *BDCE*, o pentagona *BDCFE*, o di qualunque altro poligono, ha le rette congiunte da' termini de' lati della base, ad un sublime punto *A*, ove fa l'angolo solido, che è il vertice di tale Piramide, la quale dicesi triangolare, se ha per base il triangolo, ovvero quadrangolare, se ha la base di quattro lati, o poligona, se ha la base di più lati.

FIG. 159. VIII. Se poi la base fosse un cerchio *BDEF*, e dal punto sublime *A* si vedessero tirate le rette per tutti i punti della circonferenza, questo solido si dirà *Cono*, di cui l' asse è la retta *AC*, dal vertice *A* al centro della base circolare condotta.

FIG. 160. IX. Il solido contenuto da due figure simili, ed uguali in piani paralleli, riuscendo gli altri piani laterali parallelogrammi, si dice *Prisma*; come *ABDCEF* ha i piani paralleli simili, ed uguali *BAF*, *DCE*, ed i parallelogrammi *BACD*, *BDEF*, *ACEF*; e così ancora, se i piani paralleli fossero altri poligoni, tanto ciò sarebbe un Prisma.

FIG. 161. X. E se le basi parallele sieno cerchj uguali *BDE*, *HGF*, si dirà questo solido un *Cilindro*, il di cui asse è la retta *AC*, che congiunge i centri delle basi.

FIG. 162. XI. Ma essendo ancora tali basi parallelogrammi

mi *ABCD, EFGH*, tale ſolido ſuol dirſi *Parallelepipedo*.

XII. *Sfera* diceſi il corpo generato dalla rivoluzione d' un ſemicircolo girato intorno al ſuo diametro, la di cui ſuperficie è fatta da quella ſemiperiferia: Il centro di eſſa sfera è il medeſimo, che quello del ſemicircolo generatore, e l' aſſe è il ſuo diametro fiſſo.

XIII. Se varj ſolidi compreſi da ſimili, ed uguali figure piane, foſſero nella sfera inſcritte, ſi direbbero *Corpi regolari*.

XIV. Le figure ſolide ſimili ſono quelle, che da figure piane ſimili ſi trovano compreſe, con ugual numero di angoli ſolidi, ciaſcuno uguale al ſuo corriſpondente.

XV. Simili ancora ſi dicono i coni, ed i cilindri, le di cui baſi circolari hanno i diametri proporzionali agli aſſi ugualmente inclinati al piano delle loro baſi.

SCOLIO.

Le rette, che convengono inſieme, ſono certamente in un medeſimo piano; e la retta, che ſega due parallele, ſta ſimilmente nel piano di eſſe; nè può eſſere una retta, parte in un piano, e parte in un altro al di ſopra: Quando però ſi ſegano due piani, la loro comune ſezione è una linea retta, che tanto nell' uno, che nell' altro piano è contenuta; anzi per una medeſima retta linea poſſono paſſare più Piani.

PROPOSIZIONE I.

Se la retta AD *è perpendicolare ſopra due ret-* FIG. 163.
te

te DB, DC *del piano sottopostogli, sarà ancora perpendicolare a qualunque altra linea* DE *di esso piano, onde sarà perpendicolare al piano medesimo.*

SI taglino uguali le rette *DB*, *DC*, e congiunta la *CB*, che concorra con l' altra linea *DE* in *E*, si conducano da un punto *A* di essa linea *AD* le rette *AB*, *AC*, *AE*; sarà il triangolo *BDC* isoscele, ed ancora il triangolo *ABC*, perchè le rette *AB*, *AC* sono uguali, essendo i loro quadrati uguali al quadrato di *AD*, ed al quadrato di *BD*, o della uguale *CD*, per esser retti ambidue gli angoli *ADB*, *ADC*; dunque per il Coroll. 5. della Prop. 19. della prima parte, il quadrato *AB* è uguale al quadrato *AE* col rettangolo *BEC*; ed è ancora uguale a' quadrati *AD*, e *BD*, de' quali ancora il quadrato *BD* è uguale al quadrato *DE* col rettangolo *BEC*; dunque il quadrato *AE* col rettangolo *BEC* è uguale a' quadrati *AD*, *DE* col medesimo rettangolo *BEC*; e però tolto questo di qua, e di là, rimane il quadrato *AE* uguale a' quadrati *AD*, e *DE*; onde bisogna, che ancora l' angolo *ADE* sia retto. Il che doveasi dimostrare.

COROLLARJ.

I. Quindi volendo ereggere uno stilo perpendicolare all' orizzonte, o al muro, o a qualche altro piano, basta che si accomodi con due rette in quel piano tirate ad angolo retto, con qualche norma, e riuscirà perfettamente ad esso piano perpendicolare.

II.

II. Essendo la retta AB perpendicolare a tre rette BC, BD, BE, queste saranno in un medesimo piano; altrimenti, se CB fosse fuori del piano EBD, sarebbe ABC un piano, ed EBD un altro, li quali converrebbero in una comune retta BF; onde AB sarebbe pure perpendicolare a BF, siccome all' altre due BD, BE; e nell' altro piano l' angolo ABF retto, e però uguale al retto ABC, che è una sua parte, il che è impossibile. FIG. 164.

III. Se nel piano CDB, cui è perpendicolare la AD, si tiri dal punto D la DC perpendicolare a BD, sarà quella perpendicolare al piano ADB, facendo angolo retto con le due AD, e DB. FIG. 165.

PROPOSIZIONE II.

Le due rette AB, CD *perpendicolari al piano* BDE *sono tra di loro parallele, ed in un medesimo piano.* FIG. 166.

IMperocchè, congiunta la retta BD, e fattagli perpendicolare la DE posta uguale ad AB, e congiunte le rette AD, AE, BE, sarà $AD = BE$, essendo gli angoli ABD, EBD retti, con lati uguali, che gli comprendono, cioè $AB = DE$, e BD comune, e però le basi di tali triangoli ABD, BDE sono uguali; dunque ancora saranno li triangoli ABE, EDA uguali, avendo il lato AE comune, con gli uguali lati $AB = DE$, ed $AD = BE$; però ancora l' angolo retto $ABE = ADE$; dunque facendo la ED angolo retto con le tre linee BD, DA, e DC, esse linee so-

no nel medesimo piano, e però sono *AB*, *DC* parallele, avendo gli angoli interni *ABD*, *CDB* nel medesimo piano *CDBA* uguali a due retti. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Vicendevolmente, se due rette *CD*, *AB* sono parallele, ed una di loro è perpendicolare al piano *BDE*, ancora l'altra vi sarà perpendicolare; perchè essendogli perpendicolare *AB*, fatta $DE = AB$, posta ancor essa ad angolo retto alla *BD*, si è veduto, che sarà ancora *EDA* angolo retto, e la *DE* perpendicolare al piano *ADB*, in cui è la stessa *CD* parallela ad *AB*, onde ancora l' angolo *EDC* sarà retto, ed è pur retto *CDB*, come è retto *ABD*, avendosi gli angoli interni delle linee parallele uguali a due retti; dunque *CD* facendo angolo retto, e con *DE*, e con *DB*, è perpendicolare ancor essa al piano *BDE*.

FIG. 167. II. Non possono dal punto medesimo *A* nel piano *CDE*, o superiore ad esso piano, tirarsi due linee *AB*, *AF*, ambidue perpendicolari al piano stesso, dovendo essere parallele codeste perpendicolari, e però non convenienti in un punto *A*.

FIG. 168. III. Se due piani *FG*, *IH* sono amendue perpendicolari al sottoposto *CDE*, intersegandosi nella retta *AB*, sarà questa perpendicolare al medesimo piano *CDE*; altrimenti se dal punto *B* nel piano *IH* si tirasse la *BK* perpendicolare alla retta *BH*, e nel piano *FG* la *BL* perpendicolare alla *BG*, sarebbero queste due *BK*, e *BL* per-

perpendicolari al ſottopoſto piano *CDE*; il che è impoſſibile; dunque la *BA* ſolamente gli è dal punto *B* perpendicolare.

IV. Così pure ſi ha, che facendoſi paſſare per qualunque retta *AB* perpendicolare al ſoggetto piano *CDE*, qualſiſia piano *IH*, ovvero *FG*, riuſcirà parimente eſſo piano perpendicolare al ſottopoſto.

V. Dal punto ſublime *A* ſi può tirare la retta *AB* perpendicolare al ſoggetto piano *CDE* in queſta maniera: Si tiri in eſſo piano qualunque retta *GE*, ſopra di cui dal punto *A*, nel piano, che rieſce *AGE*, ſi tiri la perpendicolare *AI*, e dal punto *I* tirata alla retta *GE* nel piano *CDE* la perpendicolare *IB*, ſopra di eſſa ſi mandi dal punto *A* nel piano *AIB* la perpendicolare *AB*; ſarà queſta al piano *CDE* perpendicolare, perchè avendo la *EI* angolo retto con *AI*, e con *IB*, eſſa è perpendicolare al piano *AIB*, onde tirando la *BF* parallela ad *IE*, ancor queſta *BF* ſarà perpendicolare allo ſteſſo piano *AIB*; onde ſaranno angoli retti *ABF*, ed *ABI*, e perciò la *AB* deve eſſere perpendicolare al piano *CDE*. FIG. 169.

VI. Quindi ſe da un punto *F* ſi vuole alzare la perpendicolare al piano *CDE*, da un punto ſublime *A* tiratagli la perpendicolare *AB*, congiunta *BF*, e nel piano *ABF* tirata la *FG* parallela ad *AB*, ſarà pure eſſa *GF* al piano *CDE* perpendicolare. FIG. 170.

PROPOSIZIONE III.

Le rette AB, EF *eſſendo ad una terza* CD FIG. 171.

parallele, non posta nello stesso piano di quelle, saranno esse AB, EF *parallele pure tra loro.*

IMperocchè nel piano delle due *AB*, *CD* tirata la *CA* perpendicolare a *CD*, e nel piano *DCEF* tirata la CE parimente perpendicolare alla stessa *CD*, riuscirà *CD* perpendicolare al piano *ACE*, dunque ancora *AB*, e *DF* al medesimo piano saranno perpendicolari, e conseguentemente parallele tra loro, facendo angoli retti con la stessa linea *AE*. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 172. I. Se per due linee parallele *EF*, *CD* passano due piani, concorrenti nella retta *AB*, questa pure sarà parallela a ciascuna di esse; altrimenti se per il punto *B* si tirasse nel piano *AD*, e nel piano *AF* le rette *BG*, *BH* parallele, quella a *CD*, e questa ad *EF*, sarebbero esse tra loro parallele, ma in un punto *B* convenienti; il che è assurdo; dunque la *AB* dovrà essere parallela ad esse *CD*, *EF*, e non verun altra tirata in essi piani dal punto *B*.

TAV. XIII. FIG. 173. II. Se tra due piani *CH*, *ED* l'istessa retta *AB* è perpendicolare ad ambidue, saranno essi tra di loro paralleli; altrimenti se potessero insieme convenire in una retta *CD*, da qualunque punto *I* di essa condotte le rette *IA*, *IB*, ne riuscirebbe il triangolo *IAB*, che averebbe in *A*, ed in *B* due angoli retti; il che è impossibile; dunque &c.

FIG. 174. III. Vicendevolmente, se i due piani *CH*, *ED* sono paralleli, la retta *AB* perpendicolare al primo

mo, sarà pure al secondo perpendicolare; perchè condottagli la retta *AG*, con cui fa l'angolo retto *BAG*, il piano *GAB* segherà l'altro *ED* nella retta *BF*, la quale sarà pure parallela ad *AG*, onde ancora l'angolo *ABF* sarà retto; e per un altra retta *CA* tirato il piano *CAB*, concorrente con l'altro *ED* in *BE*, sarà pure l'angolo *ABE* retto, essendo ancora *BE* parallela ad *AC*; dunque la *AB*, che era perpendicolare al piano *CH*, è perpendicolare ancora all'altro *ED*.

IV. Essendo poi due rette *AB*, *AF*, convenienti nel punto *A* parallele alle *CD*, *CE* convenienti in *C* in un altro piano, i loro angoli *BAF*, *DCE* saranno uguali, ed ancora i piani loro paralleli; perchè tagliata $AB = CD$, ed $AF = CE$, congiunte le rette *AC*, *FE*, *BD* saranno parallele, ed uguali, dunque ancora tirate le *BF*, *DE* sono uguali, e parallele, però i triangoli *BAF*, *DCE* sono simili, ed uguali, onde l'angolo $BAF = DCE$; ed il piano *BAF* è parallelo a *DCE*, avendosi tra loro le rette *AC*, *BD*, *FE* parallele, ed uguali, ed il solido *AFBDEC* è un prisma. FIG. 175.

PROPOSIZIONE IV.

L'angolo solido A, *compreso da tre angoli piani*, BAC, BAD, CAD, *ne averà sempre due di essi maggiori del terzo*. FIG. 176.

Se tutti tre fossero uguali, è certo, che due di essi dovranno sempre essere maggiori del rimanente; se poi ne sia uno maggiore di un altro, come $BAC > BAD$, si faccia l'angolo $BAE = BAD$, e prese le rette uguali $AD = AE$,

si congiungano le rette BD, e BE, e questa convenga con AC in C, e si congiunga CD. Essendo nel triangolo BDC, $BD + DC > BC$, e $BD = BE$, sarà $DC > CE$, dunque essendo i lati AD, AE uguali, ed AC comune alli triangoli DAC, CAE, dovrà essere l'angolo DAC maggiore di CAE; dunque essendo $BAD = BAE$, sono li due $BAD + DAC$ maggiori dell' angolo BAC. Il che ec.

COROLLARJ.

FIG. 177. I. In ogni piramide, la di cui base sia, o un triangolo, o qualunque poligono $BDEFG$, gli angoli, che sono sopra la base, saranno maggiori degli angoli di esso poligono, cioè $ABD + ADE > BDE$, e parimente $ADE + AEF > DEF$, e così degli altri.

II. Preso nel piano della base qualunque punto C, ed indi tirate le rette agli angoli di essa, cioè CB, CD, CE, CF, CG, saranno tanti questi angoli de' triangoli descritti nella base, quanti sono gli angoli de' triangoli ABD. ADE, AEF, AFG, AGB dal vertice A della piramide inclinati ad essa base, essendo tanti questi triangoli, che quelli; dunque essendo maggiori gli angoli di questi triangoli verso la base, che gli angoli del poligono, gli altri angoli verso il vertice A dovranno essere minori degli angoli al vertice C di quei triangoli descritti sopra la base; dunque tutti gli angoli, che compongono un solido, sempre sono minori di quattro retti, essendo detti angoli raccolti in C uguali appunto a quattro retti.

FIG. 178. III. Avendo pure tre angoli HEG, GEF, FEL

mi-

minori di quattro retti, di cui due ſiano maggiori del rimanente, ſi può farne di tali angoli un angolo ſolido in queſta maniera: Diviſe ugualmente le rette *EH*, *EG*, *EF*, *EL*, e condotte le linee *HG*, *GF*, *FL*, di eſſe facciaſi un triangolo *CBD*. (il che può farſi, eſſendo due di tali linee maggiori dell'altra) perchè condotta ancora la *FH*, ſono pure le due *HG*, *GF* maggiori di *FH*; ma eſſendo li due angoli $HEG + GEF$ maggiori dell' angolo *FEL*, la baſe $FH > FL$, dunque $FG + GH > FL$) e circoſcritto un cerchio al detto triangolo *CBD*, dal di cui centro *O* ſi tirino i raggi *OB*, *OC*, *OD*, queſti ſaranno minori delle rette *EH*, *EG*, *EF*, perchè ſe gli foſſero uguali, avendo le ſteſſe baſi, ſarebbero gli angoli *HEG*, *GEF*, *FEL* uguali agli angoli *BOD*, *DOC*, *COB*, li quali ſono uguali a quattro retti; e ſe detti raggi foſſero maggiori di quei lati *EH* &c. averebbero in *O* gli angoli minori di quelli fatti in *E*, per eſſere il vertice *O* più lontano dalle baſi, che il vertice *E*; onde gli angoli propoſti in *E* ſarebbero maggiori de' quattro retti, compreſi in *O*. Eſſendo adunque *OB* minore di *EH*, ſi alzi dal punto *O* la retta *OA* perpendicolare al piano *BCD*, la quale porta un quadrato uguale all' eceſſo del quadrato *EH* ſopra il quadrato *OB*; ed indi congiunte le rette *AB*, *AD*, *AC*, ſaranno tutte a' dati lati *EH*, *EG* &c. uguali, eſſendo il loro quadrato uguale alla ſomma del quadrato *AO*, e del quadrato del raggio *OB*, ovvero *OD*, o pure *OC*; onde ſono tali rette uguali a' detti lati, e le baſi parimente uguali; dunque gli angoli *BAD*, *DAC*, *CAB* uguagliano li tre

propofti *HEG*, *GEF*, *FEL*; e però ne riefce l' angolo folido in *A*, comprefo dalli tre angoli dati.

PROPOSIZIONE V.

FIG. 179. *Le rette* AB, DC, *che fegano i piani paralleli* PKQ, NGO, LIM, *fono da essi proporzionalmente divife*.

COngiungafi la retta *AC*, e congiunte le rette *AD*, *EF*, *EH*, *CB* (fupponendo, che *DC* feghi il piano di mezzo *NGO* in *F*, ed *AB* lo feghi in *H*,) farà pure *AD* parallela ad *EF*, e *BC* parallela ad *EH*, fegandofi i piani paralleil dal piano del triangolo *DCA*, e da quello dell' altro triangolo *ABC*; dunque *DA* ad *FE* è come *DC* · *CF* :: *AC* · *CE*; ed ancora *BC* ad *HE*, come *CA* · *AE* :: *BA* · *AH*, e per converfione di ragione farà pure *AC* · *CE* :: *AB* · *BH*; dunque *DC* · *CF* :: *AB* · *BH*. Il che &c.

COROLLARJ.

FIG. 180. I. Nelle Piramidi, fegandofi col piano *HIFG* parallelo alla bafe *BEDC* (o fia effa bafe triangolare, o quadrilatera, o poligona) farà la figura di tale fezione fimile ad effa bafe; imperocchè i lati *AB*, *AE*, *AD*, *AC*, da effi piani paralleli fono divifi proporzionalmente, *BA* · *AH* :: *EA* · *AI* :: *DA* · *AF* :: *CA* · *AG*; dunque ancora fono proporzionali *BE* · *HI* :: *ED* · *IF* :: *DC* · *FG* :: *CB* · *GH*; e gli angoli pure *BED*, *HIF* fono uguali (pel Corollar. 4. della Propof. 3.) e così gli altri corrifpondenti; dunque la fezione *HIFG* è fimile alla bafe *BEDC*. II.

II. Così pure ne' prismi, e ne' parallelepipedi sono simili le sezioni parallele alla base, ma uguali ancora ad essa, avendo uguali i lati, che riescono opposti ne' parallelogrammi comprendenti il prisma, ed il parallelepipedo.

III. Ancora i Coni, ed i Cilindri hanno le sezioni, parallele alla loro base circolare, simili ad essa, le quali ne' cilindri sono ancora uguali, avendo essi circoli uguali diametri.

PROPOSIZIONE VI.

Il Prisma triangolare ABCFDE *si divide in tre piramidi uguali.* FIG. 181

SI tirino le linee *BD*, *BF*, *CD*. La piramide *ABDC* sarà uguale alla *BCDF*, avendo le basi uguali *ADC*, *CDF*, e l' istessa altezza al suo vertice comune *B*; ma ancora *BCDF* è uguale all' altra *BEDF*, avendo le basi uguali *BCF*, *BEF* colla stessa altezza al loro comune vertice *D*; dunque è diviso il prisma in tre piramidi uguali.

COROLLARJ.

I. Qualsivoglia altro Prisma, o ancora parallelepipedo, sarà triplo della piramide fatta sopra la stessa base, e la medesima altezza. Perchè la base poligona può dividersi in alquanti triangoli, e così il prisma in altrettanti prismi triangolari; ed ancora la piramide, fatta sopra essa base, si divide in altrettante piramidi triangolari, che sono il terzo del prisma triangolare, eretto sopra lo stesso triangolo, alla medesima altezza: FIG. 182.

Per

Per esempio la piramide *AHEG* è la terza parte del prisma *ACBEHG*; e così ancora la piramide *AGEF* è il terzo del prisma *BCIFEG*; e così degli altri; dunque la piramide *AGHEDF* è un terzo del prisma *ACIKBEHGFD*.

FIG. 183. II. Parimente il Cono sarà un terzo appunto del cilindro ugualmente alto sopra la medesima base circolare, perchè il prisma, e la piramide avendo per base un poligono regolare iscritto in un cerchio *EHDF*, moltiplicando in infinito i loro lati, degenera il poligono in un cerchio, onde il prisma riesce un cilindro, e la piramide un cono, e però mantenendosi sempre il prisma triplo della piramide sopra la medesima base, e nell'istessa altezza, ancora essendo ridotto il prisma in un cilindro, e la piramide in un cono, quello riesce triplo di questo.

FIG. 184.

PROPOSIZIONE VII.

I prismi ugualmente alti AE, HO, *sono come le loro basi* DFE, QMNPO, *e così ancora le Piramidi in essi inscritte.*

IMperocchè moltiplicando in qualche maniera la base *DFE*, ed alzandovi alla medesima altezza i lati paralleli ad *AD*, *CF*, *BE*, altrettanto moltiplice riuscirà questo prisma del prisma *AE*, come è moltiplice la base di quello della base *DFE*, essendo ogni prisma di ugual base, e con la medesima altezza, uguale ad ogni altro: E similmente moltiplicando l'altra base *QMNOP* in qualunque altra maniera, ed erette le linee alla medesima altezza, si farà pure un

un prisma ugualmente moltiplice di *HO*, come la sua base è fatta moltiplice di questa. Che se la moltiplice base del primo sarà uguale alla base moltiplice del secondo, ancora i prismi, o le piramidi moltiplicate saranno uguali; ma se la moltiplice base dell' uno fosse maggiore, o minore della moltiplice base dell' altro, ancora maggiore, o minore sarebbe il prisma di quello, del prisma di quest' altro, ed ancora la piramide dell' uno, maggiore, o minore sarebbe di quella dell' altro; dunque tanto i prismi, quanto le piramidi ugualmente alte sono proporzionali alle loro basi, mentre le basi, ed i prismi, o le piramidi ugualmente moltiplici del primo, si accordano in uguagliare, superare, o mancare da altre ugualmente moltiplici della base, e del prisma, o piramide, secondariamente fatte. Il che &c.

Corollarj.

I. Ancora i cilindri, ed i coni ugualmente alti, sono come le loro basi, perchè se i circoli fossero doppj, o tripli &c. di esse basi, ancora i cilindri, ed i conj sarebbero ugualmente moltiplici di esse basi, onde ne segue l'istesso.

II. Se i prismi, o i cilindri avessero basi uguali, ma diverse altezze, sarebbero pure alle dette altezze proporzionali, perchè moltiplicata l'altezza di essi, ne riuscirebbero prismi, e cilindri ugualmente moltiplicati, li quali sarebbero uguali, o disuguali, secondo che le loro altezze moltiplicate fossero uguali, o pure una maggiore dell' altra.

III.

III. Ancora le piramidi, ed i coni di uguale base, saranno come le loro altezze, essendo il triplo de' prismi fatti sopra la stessa base, ed alla medesima altezza,

PROPOSIZIONE VIII.

I Prismi DC, GN *sono in ragione composta di quella delle basi, e di quella delle loro altezze, e così ancora le piramidi, i cilindri, ed i coni sono in ragione composta delle basi, e delle altezze.*

FIG. 185. IMperocchè si faccia un prisma *PV*, la di cui base *TSV* sia uguale alla base *ABC* del prisma *DC*, e l' altezza *PS* sia uguale all' altezza *GL* dell' altro prisma *GN*, sarà *DC* a *GN* in ragione composta di *DC* a *PV*, e di *PV* a *GN*; ma *DC* a *PV* è in ragione dell' altezze, avendo le basi uguali, e *PV* a *GN* è in ragione delle basi, essendo ugualmente alti; dunque *DC* a *GN* è in ragione composta delle altezze, e delle basi loro; onde ancora le piramidi fatte sulle stesse basi, ed altezze de' Prismi, di cui sono il terzo, ed i cilindri, ed i coni similmente dovranno essere in ragione composta delle loro basi, e delle loro altezze. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Se però ne' prismi, o nelle piramidi, o ne' cilindri, o ne' coni fosse la base del primo a quella del secondo, come reciprocamente l' altezza del secondo all' altezza del primo, tali solidi saranno uguali, perchè la ragione composta della

della base dell' uno alla base dell' altro, e dell' altezza di quello all' altezza di questo, che è come la base di questo alla base di quello, è lo stesso, che ragione di ugualità, essendo la composta di quella base a questa, e di questa a quella, la stessa, che di quella base a se stessa.

II. E viceversa, se i prismi, o le piramidi, o i cilindri, o i coni sono uguali, dovranno avere le basi reciproche dell' altezze, perchè la ragione composta della base del primo a quella del secondo, e dell' altezza di quello all' altezza di questo, non sarebbe ragione di ugualità, se non essendo quella base a questa, come vicendevolmente l' altezza di questo all' altezza di quello.

PROPOSIZIONE IX.

I coni, ed i cilindri simili ACE, BFH, *sono in ragione tripla de' diametri delle loro basi* CE, FH. FIG. 186.

IMperocchè questi solidi essendo simili, i loro assi *AD*, *BG* (quantunque fossero similmente inclinati, e non perpendicolari) sono come le loro altezze, e proporzionali a' diametri delle loro basi circolari; ed esse basi, essendo cerchj, sono come i quadrati de' loro diametri; pertanto esse basi sempre sono in ragione duplicata de' diametri; ma il solido *ACE* al solido *BFH* è in ragione composta di quella delle basi, e di quella delle altezze; dunque sono in ragione duplicata de' diametri, e in quella delle altezze; però essendo queste ancora come i diametri, ne riesce, che

che fiano in triplicata ragione di effi diametri; come dovea dimoftrarfi.

COROLLARJ.

I. E' manifefto, che ancora quefti fimili cilindri, o conj faranno in tripla ragione di quella delle loro altezze, o de' loro lati omologj, li quali fono nella fteffa ragione de' diametri delle loro bafi.

II. Ancora i prifmi fimili, e le piramidi fimili faranno in triplicata ragione de' loro lati omologhi, o delle loro altezze, o de' diametri delle loro bafi, o de' cerchj circofcritti alle bafi medefime, effendo pure i lati omologi, o i diametri delle bafi, come le loro altezze, e le bafi fimili in duplicata ragione di detti lati; onde la ragione compofta della proporzione delle bafi, e di quella delle altezze, o de' lati omologi, riefce triplicata di quella di effi lati, o de' loro diametri.

III. Similmente altri fimili corpi regolari, o irregolari faranno in ragione triplicata de' loro lati omologi, o de' loro affi, potendofi dividere in altrettante fimili piramidi tanto l' uno, che l'altro, ciafcuna delle quali alla fua corrifpondente è in triplicata ragione di quella de' loro lati omologi.

FIG. 187. IV. Quindi, effendo quattro rette A, B, C, D continuamente proporzionali, qualunque folido fi faccia fopra il primo lato A ed un altro fimile fopra il lato B, farà il folido primo al fecondo, come la prima retta A alla quarta D, avendo quella a quefta triplicata ragione di A a B.

PRO-

PROPOSIZIONE X.

Essendo continuamente proporzionali tre linee rette R, S, T, *fatto con le medesime un parallelepipedo* ABHF, *ed un altro* MNOQ *con tutti i lati uguali alla retta mezzana* S, *e con uguali angoli solidi nell' uno, e nell' altro, saranno ambidue tra di loro uguali.* FIG. 188.

IMperocchè essendo $AB \cdot QK :: KL \cdot BC$, le basi ABC, QKL saranno uguali; ed essendo ancora $BH = KN$, le loro altezze saranno pure uguali; dunque essi solidi sono uguali.

COROLLARJ.

I. Similmente fatti i prismi $FEABH$, $POQKN$, essendo nel primo le tre linee AB, AE, AD uguali alle tre R, S, T; e nell' altro le linee QK, QO, QI uguali alla media S, ma con angoli solidi uguali, saranno pure essi prismi tra loro uguali, come sono uguali que' parallelepipedi, dupli di essi prismi; ed ancora chi facesse le piramidi $AEBD$, $QOIK$ con le stesse linee, saranno pure esse piramidi uguali, come sono uguali detti prismi tripli di esse.

II. Facendo pure due cilindri $ABCD$, $EFGH$, ne' quali il diametro del primo BC al diametro del secondo FG sia come la prima R alla seconda S, o come S a T, ma l' altezza del secondo a quella del primo, come la prima R alla terza T, saranno essi cilindri uguali, perchè essendo il cerchio del primo a quello del secondo, come il quadrato di BC al quadrato di FG, e tanto il FIG. 189.

quad-

quadrato di R al quadrato S, quanto il quadrato S al quadrato T, eſſendo come R a T, cioè come reciprocamente è l'altezza HG all'altezza DC, perciò avendo eſſi cilindri le baſi reciproche all'altezze, devono eſſere uguali.

III. Similmente i coni, che ſi faceſſero colle dette baſi, e con l'altezze medeſime, ſaranno uguali, come lo ſono i cilindri tripli di eſſi coni.

PROPOSIZIONE XI.

FIG. 190. *Girando il ſemicircolo* EBR, *ed il rettangolo circoſcrittogli* EFQR, *intorno al diametro* ER, *ne naſce la ſfera dal ſemicircolo, ed il cilindro circoſcrittogli dal detto rettangolo; e ſarà l'eceſſo del cilindro ſopra la ſfera uguale al cono, che è tra la ſteſſa baſe circolare, e la medeſima altezza.*

Tirate al centro le rette FC, DC, s'intenda fatto con la rivoluzione del triangolo FEC circa EC il cono $DVFTC$; queſto ſi moſtrerà eſſere uguale all'eceſſo del ſemicilindro $DTFBYA$ ſopra l'emisfero $BYANEOB$; imperocchè tagliando queſti ſolidi con un piano parallelo al cerchio $DTFV$ per la retta GH parallela a DF, ſegante l'emisfero ne' punti N, O, ed i lati del cono in L, M; congiunto il raggio CO, ſarà $CO^2 = IH^2$; ed è $CO^2 = CI^2 + IO^2$, e l'altro $IH^2 = IO^2 + GOH$; dunque $CI^2 = GOH$; ed è $CI^2 = IM^2$ (come $CE = EF$, e $CI = IM$) dunque $IM^2 = GOH = IH^2 - IO^2$, però il cerchio del raggio IM, dentro il cono $DVFTC$, è uguale all'eceſſo del cerchio, che è nel cilindro col raggio IH, ſopra il cerchio dell'emisfero,

col

col raggio *IO*, essendo questi cerchj, come que' quadrati; dunque essendo qualunque cerchio di quel cono uguale all' eccesso de' cerchj del cilindro *DTFBYA*, sarà esso cono uguale all' eccesso di esso cilindro sopra l' emisfero; e similmente l' eccesso dell' altro cilindro *AYBQXPS* sopra il rimanente emisfero *AYBR* sarà uguale all' altro cono *CQSPX*; dunque l' eccesso di tutto il cilindro *FQSPD* circoscritto alla sfera, sopra la detta sfera *EBYAR* è uguale alli due coni fatti colla medesima base circolare coll' altezza del raggio, li quali uguagliano il cono della medesima base, con l' altezza di tutto il diametro doppio del raggio; però il detto eccesso del cilindro sopra la sfera inscrittagli è uguale al cono *EPSQX*, che ha la stessa base circolare *PSQX*, e l' altezza *AE* diametro della sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Dunque il detto eccesso del cilindro sopra la sfera è un terzo di esso cilindro, essendo pure il detto cono un terzo del medesimo.

II. E però il cilindro alla sfera inscritta è in ragione sesquilatera, cioè come 3. a 2.

III. In un emisfero *AYBR* inscritto un cono *RBYA*, che ha la medesima base circolare, e la stessa altezza *CR*, esso emisfero sarà doppio di esso cono, essendo pure questo uguale all' altro *CPSQX*, ed in somma un terzo del cilindro circoscritto all' emisfero, di cui è sesquilatero.

IV. Le sfere sono in triplicata ragione de' loro diametri, essendo proporzionali a' loro circo-

fcritti cilindri, i quali fono fimili, e però fono in triplicata ragione de' loro affi, o diametri.

PROPOSIZIONE XII.

TAV. XIV. FIG. 191. *Nella sfera non folamente fono cerchj i piani, che fanno le ordinate del femicerchio, dalla cui rivoluzione intorno al diametro fi genera effa sfera; ma qualfivoglia piano* DEB, *che feghi effa sfera, ne fa nafcere pure un circolo* DEBG.

IMperocchè dal centro *C* di effa sfera tirata la *CA* perpendicolare fopra quel piano, e congiunte al perimetro di tale fezione le rette *AD*, *AE*, *AB*, indi tirati i raggi *CD*, *CE*, *CB*, che fono uguali, i loro quadrati faranno pure uguali; ma $CD^2 = CA^2 + AD^2$; e $CB^2 = CA^2 + AB^2$ e $CE^2 = CA^2 + AE^2$, e così fempre; dunque ancora $AD^2 = AB^2 = AE^2$, mentre collo ftеffo quadrato della perpendicolare *CA* uguagliano il quadrato del raggio della sfera; però tutte le rette *AD*, *AB*, *AE* &c. effendo uguali, bifogna che quefta fezione *DEBG* fia un cerchio, il di cui centro *A*; dunque tutti i piani, che fegano la sfera riefcono cerchj. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Quindi dal centro di qualfivoglia fezione circolare della sfera, eretta la perpendicolare *AC*, paffa per lo centro *C* di effa sfera: ficcome tirata dal centro della sfera fopra qualunque piano, che la feghi, la perpendicolare *CA*, paffa per lo centro di tale fezione circolare.

FIG. 192. II. Similmente, per trovare il centro della sfe-

ra

ra, da due fezioni di piani circolari DE, GF, non parallele tra loro, tirate dal centro A, e dal centro B di effe le perpendicolari AC, BC, convenienti in C, farà effo C il centro di effa sfera, perchè tutte e' due quefte perpendicolari paffano per lo centro della sfera.

III. Se tali cerchj fono uguali, effendo il raggio AE del primo uguale al raggio BF del fecondo, faranno effi ugualmente diftanti dal centro C della sfera, perchè effendo i quadrati de' raggi CE, CF uguali, fono ancora $AE^2 + AC^2 = BF^2 + BC^2$, e però effendo $AE^2 = BF^2$, ancora $AC^2 = BC^2$. Ma fe foffe uno GF minore dell' altro DE, farebbe quefto più lontano, che quello dal centro C della sfera; mentre effendo $BF^2 + BC^2 = AE^2 + AC^2$, e $BF^2 < AE^2$, farà $BC^2 > AC^2$, e così è maggiore la diftanza BC della diftanza AC.

PROPOSIZIONE XIII.

Defcrivere nella sfera, il di cui diametro GH, *una piramide equilatera, ed equiangola, che è un folido regolare, il quale dicefi* Tetraedro. FIG. 193.

SI pigli del diametro GH la terza parte HA, e per lo punto A fi feghi la sfera con un piano, cui fia perpendicolare GA, onde ne riefca il cerchio $FBED$, il di cui diametro FE, il centro A; e divifo il raggio AF per mezzo in I, fe gli conduca la perpendicolare BID; indi fi tirino le rette BE, DE, BG, DG, EG. Sarà il folido $GDBE$ la Piramide equilatera ricercata; imperocchè congiunta la FD farà uguale al raggio

AD, onde il triangolo FAD sarà equilatero, e l'angolo FAD sarà la terza parte di due retti, onde l'arco FD sarà la terza parte della semiperiferia FDE, onde BFD è la terza parte di tutta la circonferenza $FBED$; e similmente BE, ED ne sono le altre due terze parti; dunque il triangolo BED è equilatero; ed è il quadrato BE triplo del quadrato AE, essendo $BE^2 \cdot EF^2 :: IE \cdot EF :: 3 \cdot 4.$, ed $EF^2 \cdot AE^2 :: 4 \cdot 1.$ dunque $BE^2 \cdot AE^2 :: 3 \cdot 1.$; ed ancora GE^2 ad AE^2 è come HGA ad HAG, cioè $:: HG \cdot HA :: 3 \cdot 1$; dunque ancora $BE^2 = GE^2$; e così tutti gli altri lati GB, GD saranno uguali a GE (essendo i loro quadrati uguali al quadrato della perpendicolare GA, e al quadrato de' raggi AB, AD, AE tra loro uguali) però sono essi pure uguali agli altri lati BE, BD, DE; dunque tutti i lati di essa piramide sono uguali, onde è composta di quattro triangoli equilateri; ed è un solido da lati uguali, e da angoli uguali compreso; però esso $GDBE$ è il Tetraedro, che volevasi inscrivere nella sfera.

COROLLARJ.

I. Il quadrato di ciascun lato GE della Piramide al quadrato del diametro della sfera GH sta come $AG \cdot AH :: 2 \cdot 3$.

II. Il quadrato del raggio della sfera CG al quadrato del lato GE della Piramide, è come 3. 8.; perchè il quadrato del raggio essendo un quarto del quadrato del diametro, $CG^2 \cdot GH^2 :: 1 . 4 :: 3 \cdot 12$; ma $GH^2 \cdot GE^2 :: 3 \cdot 2 :: 12 \cdot 8$; dunque $CG^2 \cdot GE^2 :: 3 \cdot 8$.

PRO-

PROPOSIZIONE XIV.

Nella sfera, il di cui diametro GH, *inscrivere un cubo, cioè un solido regolare, da sei quadrati uguali compreso.* FIG. 194.

SI pigli *AH* uguale a un terzo del diametro *GH*, come si è fatto nella precedente, e gli si ponga *AE* perpendicolare, conveniente colla circonferenza del cerchio in *E*, e si congiungano *GE*, *EH*, e si compisca il rettangolo *GEHB* inscritto al medesimo cerchio. Poscia per le rette *GE*, *BH* si tirino due piani perpendicolari al piano del detto rettangolo, i quali saranno due cerchj paralleli *EKGI*, *HFBD*; ne' quali essendo i diametri *EG*, *HB* uguali, tirate in essi per i loro centri *N*, *C* le rette *KNI*, *DCF* ad angolo retto a' detti diametri, e congiunte le rette *EI*, *IG*, *GK*, *KE* nell'uno, ed *HD*, *DB*, *BF*, *FH* nell'altro, saranno questi due quadrati uguali, in detti circoli inscritti; e congiunte ancora le rette *ID*, *KF*, saranno pure parallele alle altre *EH*, *GB*, congiungendo que' lati uguali de' quadrati paralleli, e saranno altri quadrati uguali a quelli; imperocchè siccome il quadrato *GE* è duplo del quadrato *EK*, ed è quel medesimo duplo del quadrato *EH*, essendo $GE^2 \cdot EH^2 :: GA \cdot AH :: 2 \cdot 1$. dunque $EK = EH$, e così tutte l' altre linee, che fanno i lati del solido *EKGIDBFH*, essendo uguali, e ad angoli retti, rimane evidente essere questo un cubo di sei quadrati *EKGI*, *BFHD*, *EKFH*, *KFBG*, *GIDB*, *IDHE*, inscritto nella data sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il quadrato del diametro GH della sfera è triplo del quadrato di ciascun lato del cubo inscrittovi, perchè $GH^2 \cdot EH^2 :: GH \cdot HA :: 3 \cdot 1$.

II. Essendo il lato della Piramide $= GE$, il quadrato di esso al quadrato del lato del cubo è come $2 \cdot 1$; essendo $EG^2 \cdot GK^2 :: EG \cdot GN$.

III. Essendo il quadrato del raggio della sfera al quadrato del lato della piramide, come 3 a 8; ed il quadrato di esso lato piramidale al quadrato del cubo inscritto nella medesima sfera in ragione dupla, come 8 a 4; perciò il quadrato del raggio della sfera al quadrato del lato del cubo inscrittovi è come 3 a 4.

PROPOSIZIONE XV.

Nella sfera inscrivere un solido regolare, compreso da otto triangoli equilateri, che dicesi Ottaedro.

FIG. 195. Si seghi per lo centro A essa sfera con due piani $HEGD$, $CEBD$, l'uno all' altro perpendicolare, che converranno insieme nel loro comune diametro ED, e condotti gli altri diametri GH, BC perpendicolari al suddetto, e tra loro ancora; si congiungano le rette GE, GD, DH, HE, EB, BD, DC, CE, che tutte saranno tra loro uguali, essendo i lati de' quadrati $GEHD$, $CEBD$, inscritti in questi uguali cerchj; è manifesto, che il solido sarà compreso da questi otto triangoli equilateri, GEB, GEC, GCD, GDB, HEB, HEC, HCD, HDB; e però es-

so

so sarà l' Ottaedro equilatero inscritto nella sfera. Il che &c.

Corollarj.

I. Il quadrato del diametro *CB* della sfera è duplo del quadrato del lato *GB* di questo solido regolare interpostovi.

II. Esso quadrato del lato di questo Ottaedro al quadrato del lato della Piramide inscritta nella stessa sfera sarà come 3. a 4, essendo il quadrato del lato dell' Ottaedro al quadrato del diametro della sfera come 1. a 2., cioè come 3. a 6; e il quadrato di detto diametro della sfera al quadrato del lato della Piramide, come 3. a 2, cioè come 6 a 4.

III. Il quadrato del lato dell' Ottaedro al quadrato del lato del cubo inscritto alla detta sfera è come 3. a 2, essendo quello al quadrato del diametro, come 1. a 2, ed esso quadrato del diametro al quadrato del lato del cubo, come 3. ad 1.

IV. Ma ancora il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato della Piramide è come 3. a 2; dunque il diametro della sfera al lato della piramide è come il lato dell' ottaedro al lato del cubo.

PROPOSIZIONE XVI. Fig. 196.

Nella data sfera inscrivere un corpo regolare, che dicesi Dodecaedro, *da dodici pentagoni equilatei, ed equiangoli compreso.*

Sia il cubo $ADCGB$ in essa sfera descritto, i cui lati BC, CD, AD si dividano pel mezzo ne' punti L, H, F, e si compiscano i quadrati $LCHN$, $NHDK$, $DFIH$, e divisi i lati LN, NK, HI nell' estrema, e media ragione, siano i maggiori segmenti NP, NO, IQ, ed a questi si alzino uguali le rette PS, NV, OR perpendicolari al piano del quadrato $BCDE$, le quali saranno parallele, convenienti in una retta SVR parallela a PO, e per il punto Q nel piano NHI, si conduca ZQ parallela ad NH, e congiunta la VH, concorra con ZQ in T; indi si tirino le linee CT, DT, DR, CS; nel piano delle parallele CD, SR ne riuscirà il pentagono $CSRDT$ regolare, li cui angoli uguali saranno ugualmente distanti dal centro X della sfera, e del cubo, il quale centro è nella retta VNZ prolungata fino al lato IX del quadrato che può farsi $NHIX$, sopra tali linee, che sono la metà de' lati del cubo, onde il punto X riesce nel mezzo.

Tirate le rette CP, DO, DQ, CQ, è chiaro essere queste uguali, essendo basi di triangoli rettangoli, i di cui lati maggiori sono la metà del lato del cubo, cioè CL, DK, DH, CH, ed i lati minori PL, KO, HQ sono pure la porzione minore dell' estrema, e media ragione di esse LN, NK, IH, ciascuna uguale alla metà del lato del cubo, e però tutti essi lati sono uguali; ed il quadrato CP essendo triplo del quadrato PN, perchè $CL^2 + LP^2 = NL^2 + LP^2 = NP^2 + 2NPL + 2LP^2 = NLP + 2NLP = 3NLP = 3PN^2$; ed aggiunto il quadrato $PS^2 = PN^2$, sarà $CP^2 + PS^2$

$+ PS^2 = CS^2 = 4PN^2 = 4VS^2 = SR^2$; dunque $CS = SR$; e così ancora DR, il di cui quadrato $= DO^2 + OR^2$, sarà uguale ad SR; ed essendo ancora $QT = VN$, perchè $NH \cdot VN$ :: $QT \cdot QH$, ed è $NH \cdot VN$ ($LN \cdot NP$ :: $NP \cdot PL$) :: $VN \cdot QH$; dunque $QT = VN$, e però ancora $DT^2 = DQ^2 + QT^2 = 4PN^2$; e così ancora CT, e TD sono uguali a CS, ad SR, a DR; onde questo pentagono $SRDTC$ è equilatero.

Che sia poi ancora equiangolo, tiratavi la retta CR, si mostrerà, essere questa $= CD$; imperocchè essendo $NO = NP$ (per il Coroll. 6. della Proposiz. 5. della parte seconda) sarà pure $LO \cdot LN$ :: $LN \cdot NO$; dunque $LO^2 + ON^2 = 3LN^2$; ed essendo $OR = ON$, saranno $LO^2 + OR^2 = 3NL^2$, ed aggiuntovi $CL^2 = NL^2$, i quadrati $LO^2 + OR^2 + CL^2 = 4NL^2 = CD^2$; ma congiunta CO, sarà $CO^2 = LO^2 + CL^2$, dunque $CO^2 + OR^2$, cioè $CR^2 = CD^2$; onde l'angolo $CSR = CTD$, avendo uguali i lati, e la base $CR = CD$; e così pure dimostrerassi ancora l'angolo SRD uguale a gli altri, e l'angolo RDT con l'altro TCS può dimostrarsi pure uguale a quelli, perchè condotta la TR, siccome $VN = PN$, ed $NZ = HQ = PL$, la $VZ = NL$; e la $ZQ = NH = NL$, e $QT = VN = NO$, dunque $ZT = LO$; onde $VZ^2 + ZT^2 = VT^2 = NL^2 + LO^2 = CL^2 + LO^2 = CO^2$; ed essendo ancora $VR^2 = OR^2$, li quadrati $VT^2 + VR^2 = TR^2 = CO^2 + OR^2 = CR^2$; onde ancora la $TR = CR$, ed i lati RD, e DT uguali a' lati RS, CS; però l'angolo $RDT = RSC$;

ed

ed ancora TCS si mostra uguale agli altri; però esso pentagono è ancora equiangolo.

Ed essendo $NX = HI = LN$, ed $NV = NO$, sarà $XV = LO$, ed $VR = NO$, dunque $LO^2 + ON^2$, che è uguale al triplo di LN, ed ancora $XV^2 + VR^2$, cioè il quadrato della linea, che si conducesse da X ad R, sarà il triplo del quadrato LN; ed ancora essendo $ZT = LO$, ed $XZ = PN = NO$, sono pure li quadrati $ZT^2 + XZ^2 = LO^2 + NO^2 = 3LN^2$; e tale sarebbe il quadrato della retta condotta da X a T, dunque sarà uguale alla condotta da X a R, e da X a S, e però tutti uguali al raggio della sfera, che viene da X agli angoli del cubo, cioè a D, ed a C, perchè essendo il quadrato del diametro della sfera triplo del quadrato del lato cubico, ancora il quadrato del semidiametro, cioè del raggio della sfera è triplo del quadrato di LN, che è la metà di LK, o di CD, lato del cubo; sicchè tutti gli angoli del pentagono $CTDRS$ sono nella superficie della sfera, essendo ugualmente lontani dal centro X di essa. Il che riuscendo, in tutte l'altre parti descritto il pentagono, è chiaro, che saranno dodici, e però sarà fatto il dodecaedro regolare inscritto nella sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il lato del dodecaedro è la porzione maggiore del lato cubico diviso per estrema, e media ragione, perchè siccome $SV = PN$, che è la parte maggiore di NL divisa in detta estrema, e media ragione, così il duplo di quello, che è SR, deve essere la maggior porzione di LK, o

CD, dupla di *NL*, divisa similmente in estrema, e media ragione.

II. Quindi il quadrato del lato cubico al quadrato del lato del dodecaedro è come una linea alla minore porzione di essa, divisa con estrema, e media ragione, essendo quella a questa come il quadrato di tutta al quadrato della maggiore porzione.

III. Il quadrato del diametro della sfera essendo triplo del quadrato del lato cubico, sarà al quadrato del lato del dodecaedro come una linea alla terza parte della sua minor porzione, con cui sia divisa per estrema, e media ragione.

IV. Essendo il quadrato del lato della piramide duplo del quadrato del lato cubico, sarà esso quadrato del lato piramidale al quadrato del lato del dodecaedro come una linea retta alla metà della minore porzione di essa, divisa secondo la ragione media, ed estrema.

V. E perchè il quadrato del lato dell'ottaedro al quadrato del lato cubico è come 3. a 2.; perciò esso quadrato del lato di un ottaedro al quadrato del lato del dodecaedro è come una retta a due terzi della minore porzione della stessa sua ragione estrema, e media, con cui può essere divisa.

PROPOSIZIONE XVII. FIG. 197.

Il quadrato del lato AD *d'un pentagono, inscritto in un cerchio, è uguale al quadrato del raggio di esso* CD, *col quadrato del lato* AE *d'un decagono inscritto nel medesimo cerchio, che divide per mezzo gli archi, cui si sottopongono i lati del pentagono.*

Con-

Congiunto il raggio CE, che divide per mezzo l' angolo DCA, dividasi ancora l'angolo ACE per mezzo colla retta CL; essendo adunque l'arco MD doppio di ED, e l' arco MN ($= AE$) doppio di EL, sarà l' arco NMD doppio di DL, onde l' angolo NCD, che è il doppio di CAD, sarà pure doppio di DCH; dunque gli angoli CAD, e DCH sono uguali; e però i triangoli ACD, CDH, che hanno l' angolo comune in D, sono simili; onde $AD \cdot DC :: DC \cdot DH$; e però $DC^2 = ADH$; e congiunta la retta EH, e tirata la DE conveniente con CA in B, sarà $EH = HA$, essendo basi de' triangoli CEH, CAH, che intorno agli angoli uguali in C vi è il lato comune CH, ed il raggio $CE = CA$; dunque essendo ancora $DE = EA$, l' angolo $HEA = HAE = ADE$, però sono simili pure i triangoli ADE, ed EAH, onde $AD \cdot AE :: AE \cdot AH$, ed il quadrato $AE^2 = DAH$; dunque $DC^2 + AE^2 = ADH + DAH = AD^2$; onde il quadrato del lato del pentagono è uguale al quadrato del raggio col quadrato del decagono. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Tirate le linee DO, AO, sarà l' angolo $DOA = ECA$, essendo l' uno, e l' altro doppio di EOA, e siccome gli angoli sopra la base del triangolo isoscele DOA, cioè ODA, ed OAD sono doppj dell' angolo verticale DOA; così ancora nel triangolo isoscele ECA gli angoli CAE, e CEA sono ciascuno di essi il doppio dell' angolo ACE; dunque essendo $DEC = CEA$, sarà $DEC = 2\,ACE$; ed è $= ACE + EBA$, dunque bisogna, che sia

ACE

$ACE = EBA$; e però i lati CE, ed EB sono uguali; sicchè BE è uguale al raggio del cerchio CE.

II. Similmente, essendo $CAE = 2\,ACE = 2\,ABE$; ed uguale agli angoli $ABE + AEB$; dunque $ABE = AEB$, ed il lato $AB = AE = ED$; onde ancora $CB = DB$, essendo questo, e quello uguali alla somma di un raggio circolare, e di un lato del decagono.

III. Quindi li triangoli CEB, BAE sono simili, essendo l'angolo $AEB = ECB$, e l'angolo B comune; dunque $CB \cdot BE :: BE \cdot AB$, e $CBA = BE^2 =$ al quadrato del raggio $CA^2 = BE^2$; onde la retta composta insieme col raggio circolare, e col lato del decagono, come sono DB, e CB, essendo $CBA = CA^2$, e $BDE = BE^2$, è divisa in estrema, e media ragione; e così vicendevolmente, se una retta si divide in estrema, e media ragione, il maggior segmento può prendersi per raggio d'un cerchio, e sarà il segmento minore uguale al lato d' un decagono da iscriversi nel medesimo cerchio.

PROPOSIZIONE XVIII.

Descrivere nella sfera un solido regolare compreso da venti triangoli equilateri, il quale dicesi Icosaedro.

PEr lo centro C della sfera fatto il cerchio BGD, tirato il diametro BCE, e postagli perpendicolare la retta $BN = BE$, si tiri la retta CN, segante la periferia in A, e D, quindi tirate le perpendicolari al diametro AFS, e DRG, si facciano passare per esse due piani perpendicolari FIG. 198.

al

al medesimo cerchio, che saranno li cerchj $AOSL$, $DHGM$, ed in essi descrivansi dal punto A, e dal punto D li pentagoni $AOPQL$, $DIHKM$, ed a tutti i loro angoli si connettano le rette AH, HO, OI, IP, PD, DQ, QM, ML, LK, KA; ed a' termini B, E del diametro si congiungano pure le rette AB, OB, PB, QB, LB, e le rette ED, EI, EH, EK, EM. Quindi ne risulterà il solido regolare da venti triangoli equilateri uguali compreso; Imperocchè essendo BN dupla del raggio BC, sarà pure AF dupla di CF, e però $= RF$, e congiunta AG, sarà $AFRG$ un quadrato; e tirate le GH, GK, che sarebbero lati del decagono inscritto nel cerchio $DHGM$, essendo $AK^2 = AG^2 + GK^2$, ed ancora $AH^2 = AG^2 + GH^2$, ma GH, GK, sono uguali, adunque $AK = AH$, ed AG è uguale al raggio GR, il di cui quadrato col quadrato del lato del decagono uguaglia il quadrato del lato del pentagono inscritto (per la prop. 17.) ne segue, che tanto AK, che $AH = KH$, onde AHK è un triangolo equilatero, e così gli altri interposti fra questi due cerchj saranno pure triangoli di lati uguali; ed essendo $AF^2 = EFB = RBF = RF^2$, la RB è divisa in F con estrema, e media ragione, onde per il Coroll. 3. della Prop. 17. essendo $RF = AF$ raggio del cerchio $AOSL$, deve essere FB uguale al lato di un decagono da inscriversi in esso cerchio; dunque AB è pure uguale al lato dell' inscritto pentagono AO, essendo tanto AO^2, che $AB^2 = AF^2 + FB^2$, e così tutte l' altre rette OB, PB &c. saranno uguali a' detti lati del Pentagono; e similmente dall' altra parte le rette ED, EI &c. uguagliano ciascun lato

to DI, IH &c. dunque è ancora vero, che questi termini sono triangoli equilateri, uguali tra loro, e con ciascuno di quelli intercetti fra li due cerchj; però riesce in tal maniera fatto l' Icosaedro contenuto da venti triangoli uguali tra loro, ed equilateri. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il quadrato della sfera al quadrato del lato dell' Icosaedro, cioè AD^2 ad AB^2, sta come cinque con la radice di cinque, a due, cioè :: $5 + \sqrt{5} \cdot 2$, o pure :: $10 \cdot 5 - \sqrt{5}$ (perchè il prodotto dell' estreme $25 + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 5 = 20$. che è il prodotto delle medie) Il che si pruova, perchè essendo AF doppia di FC, sarà $AF^2 = 4\,FC^2$, e però $AC^2 \cdot CF^2 :: 5 \cdot 1$, e così ancora $AD^2 \cdot AG^2$; ed $AG^2 \cdot GH^2 :: 1 \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

(essendo $AG + GH$ la somma del raggio del cerchio GHD, e del lato del decagono inscritto in esso, come una retta divisa in estrema, e media ragione; onde facendo essa somma $= x$, ed $AG = 1$, sarà $GH = x - 1 = \frac{1}{x}$ dunque $xx - x = 1$, ed aggiunto $\frac{1}{4}$ di quà, e di là, riesce $xx - x + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, e presane la radice $x - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ onde $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ però $GH = x - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}+1-2}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; onde il suo quadrato $GH^2 = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{4}$

$=$

$= \frac{6 - 2\sqrt{5}}{4} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$) ed aggiuntovi $AG^2 = 1$, ne riesce $AG^2 + GH^2 = 1 + \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{2 + 3 - \sqrt{5}}{2} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} = AH^2 = AB^2$, dunque $AD^2 \cdot AB^2 :: 5 \cdot \frac{5 - \sqrt{5}}{2} :: 10 \cdot 5 - \sqrt{5} :: 5 + \sqrt{5} \cdot 2$.

II. Il quadrato del lato della Piramide essendo al quadrato del diametro della sfera come 2. a 3; e di questo diametro il quadrato, a quello del lato dell' Icosaedro, essendo, come $5 + \sqrt{5} \cdot$ a 2: dovrà per analogia perturbata essere il quadrato del lato della Piramide al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5} \cdot$ a 3.

III. Essendo poi il quadrato del lato del cubo al quadrato del lato della piramide, come 1. a 2, cioè come 3 a 6 e il quadrato di questo al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 3, sarà il quadrato del lato del cubo a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 6.

IV. E perchè il quadrato del lato dell' Ottaedro a quello del lato Cubico è come 3 a 2, cioè come 6 a 4, e questo a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 6, sarà pure il quadrato del lato dell' Ottaedro a quello del lato dell' Icosaedro, come $5 + \sqrt{5}$ a 4.

V. Il quadrato del lato del Dodecaedro al quadrato del lato dell' Icosaedro, come $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$ a 1; imperocchè il quadrato del lato dell' ottaedro, al quadrato del lato del dodecaedro è come una

retta

retta a due terzi della minor porzione, con cui sia divisa secondo l'estrema, e media ragione; cioè come 2 a $2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$ (perchè se una linea si fa $= 2$, divisa in detta estrema, e media ragione, ha la porzione maggiore $= \sqrt{5} - 1$, onde la rimanente minor porzione $= 2 - \sqrt{5} + 1 = 3 - \sqrt{5}$, onde li suoi due terzi sono $= 2 - \frac{2\sqrt{5}}{3}$) ed il quadrato del lato dell'Icosaedro al quadrato del lato dell'ottaedro è come 4. a $5 + \sqrt{5}$; dunque il quadrato del lato dell'Icosaedro al quadrato del lato del dodecaedro è in ragione composta di 2. a $2 - \frac{25}{3}$, e di 4. a $5 + \sqrt{5}$, delle quali risulta la ragione di $8 \cdot 10 + 2\sqrt{5} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{10}{3}$ cioè di 8. a $\frac{20}{3} - \frac{4\sqrt{5}}{3}$, o come 2 a $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$; dunque convertendo, il quadrato del lato del dodecaedro al quadrato del lato dell'Icosaedro è come $\frac{5 - \sqrt{5}}{3}$ a 2.

PROPOSIZIONE XIX.

FIG. 199.

In un cerchio BDK, *che sia uguale al maggiore di una sfera, descrivere tutti i lati de' cinque solidi regolari, che in essa sfera possono inscriversi.*

SI tiri il diametro *BCE*, e dal centro *C* si alzi perpendicolare il raggio *CK*, cui si tiri parallela $BN = BE$, ed al centro *C* congiunta la *NC*, che seghi la periferia ne' punti *A*, *D*, si

conduca pure la AF perpendicolare al diametro, e presa la BL uguale alla terza parte del diametro, si alzi pure la perpendicolare LH, segante CN in I, e dal punto I si tiri IG perpendicolare alla AD; poscia si congiungano le rette EH, HB, EK, AG, ed AB, queste saranno i lati di detti solidi regolari, che in detta sfera possono iscriversi. Imperocchè, essendo il quadrato del diametro della sfera BE al quadrato del lato della Piramide come 3 a 2, cioè come BE ad EL, nella qual proporzione è il quadrato di BE al quadrato di EH, però il lato della Piramide sarà uguale alla retta EH.

Ed essendo il quadrato del diametro BE al quadrato del lato del cubo, come $3 \cdot 1 :: EB \cdot BL :: BE^2 \cdot BH^2$, bisogna pure sia BH il lato del cubo.

Ma il quadrato del diametro BE al quadrato del lato dell' ottagono è come $2 \cdot 1 :: BE \cdot EC :: BE^2 \cdot EK^2$; dunque EK è il lato dell' ottaedro.

E perchè il quadrato del diametro della sfera al quadrato del lato del dodecaedro è come

2. ad $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$, sarà AG il lato del dodecaedro,

perchè essendo BN dupla di BC, però $BN^2 = 4\,BC^2$, onde $BN^2 + BC^2 = 5\,BC^2 = CN^2$ sicchè posta $BC = 1$, la $CN = \sqrt{5}$, ed essendo $BL = \frac{1}{3}\,BE = \frac{2}{3}\,BC$, la $CL = \frac{1}{3}\,CB$, e la $CI = \frac{1}{3}\,CN = \frac{\sqrt{5}}{3}$, onde $CA = BC = 1$,

$= 1$, la $CA - CI = 1 - \frac{\sqrt{5}}{3} = AI$, però $DA = 2$, ad AI, è come 2 ad $1 - \frac{\sqrt{5}}{3}$; ed essendo DA un diametro $= EB$, ed ancora $DA^2 \cdot AG^2 :: DA \cdot AI$, perciò AG è il lato del dodecaedro, essendo il quadrato del diametro della sfera AD al quadrato di AG, come 2. ad 1. $- \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Il lato poscia dell'Icosaedro è AB, come apparisce dalla costruzione della precedente proposizione; però le rette EH, BH, EK, AG, AB, sono i lati de' cinque solidi regolari, che possono inscriversi in detta sfera. Il che &c.

COROLLARJ.

I. Il lato della Piramide EH è il maggiore di tutti, ed il lato AG del dodecaedro è il minimo di ciascuno.

II. Il lato dell'ottaedro EK è maggiore del lato BH del cubo, e questo è pur maggiore del lato AB dell'Icosaedro.

III. I quadrati del lato della Piramide EH, e del lato BH del cubo, presi insieme, sono uguali al quadrato del diametro BE della sfera.

PROPOSIZIONE XX.

Niuno altro solido regolare può aversi, oltre li cinque addotti per inscriversi nella sfera.

IMperocchè l'angolo solido deve essere costituito almeno con tre angoli piani, o con più di

essi, ma però minori di quattro retti; dunque l' angolo de' triangoli equilateri essendo uguale a due terzi di un retto, non possono fare un angolo solido se non tre di essi, come nella Piramide; o quattro de' medesimi, come nell' ottaedro, o al più cinque, come nell' Icosaedro; ma non già sei di essi, che sarebbero quattro retti. L' angolo de' quadrati essendo retto, solamente tre di essi possono fare l' angolo solido nel cubo, perchè quattro sarebbero uguali a quattro retti. L' angolo del Pentagono essendo uguale ad un retto con la quinta parte di esso, possono solamente tre di tali angoli fare l' angolo solido del dodecaedro, e non quattro di essi, che sarebbero maggiori di quattro retti; perciò solamente questi cinque solidi regolari possono riuscirne. Il che dovea dimostrarsi.

COROLLARJ.

I. Non possono però farsi solidi regolari di altri piani compresi da maggior numero di lati uguali, ed uguali angoli, perchè l' esagono ha l' angolo uguale ad un terzo di quattro retti; onde tre angoli dell' esagono equivagliono a quattro retti, e però non possono fare un solido; e gli altri piani regolari di maggior numero di lati avendo l' angolo maggiore di quello dell' esagono, molto meno possono fare l' angolo solido.

II. Si potrebbero inscrivere però nella sfera altri solidi, ma irregolari, o compresi da figure tutte diverse, o da alcune uguali, e tra se simili, ma da altre di sorte diversa uguali, e simili tra di se: Per esempio, si potrebbe in due pa-

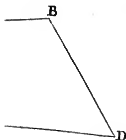
paralleli, ed uguali circoli della sfera descriverci due simili poligoni regolari, di qualunque numero di lati; e da qualsivoglia angolo dell'uno tirate le rette a' termini di qualunque lato dell' altro poligono contrapposto, si faranno altrettanti triangoli simili, quanti sono i lati d'ambidue i poligoni, onde ne riuscirà un solido così inscritto nella sfera; ed ancora in tre circoli uguali, fatti col diametro de' lati d'un triangolo equilatero inscritto nel cerchio maggiore della sfera, e perpendicolari al piano di esso, descrivendo tre poligoni simili, ed uguali, e poscia fatti li triangoli col lato di essi poligoni, e con le rette tirate da' loro termini agli angoli dell' opposto poligono, similmente ne riuscirà un altro solido inscritto nella sfera &c. Ma questi non diconsi solidi regolari, non avendo tutti i piani simili, ed uguali, ma solamente alcuni simili d' una specie, altri d'un altra.

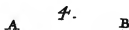
AVVERTIMENTO.

Moltissime altre proprietà de' solidi potrebbero quì aggiungersi; ma troppo lunghe riuscirebbero queste Instituzioni; siccome ancora delle piane figure potrebbero esporsi molti altri Teoremi, che io ne' miei scritti ho più volte dimostrati; ma non ho stimato bene l' aggiungerli tutti in questo Trattato, che ora finalmente voglio, che sia esattamente il sincero.

IL FINE.

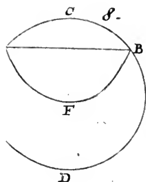
ERRORI		CORREZIONI
Pag. 35. verſo	17. *B D F*	*D B F*
43.	2. ſono due retti	ſono uguali a due retti
50.	31. l'angolo *C A L*	l'angolo *C L A*
70.	2. retti angoli	rettangoli
118.	21. dagli	degli
161.	17. altezza *A E*	altezza *E R*

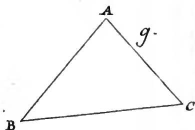

B
D

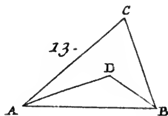

4.
A
B

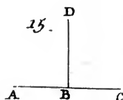

C
D

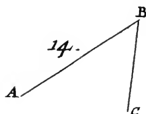

A

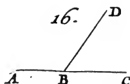

C
8.
B
F
D


A
9.
B
C

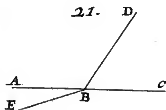

C
13.
D
A
B

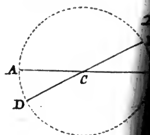

D
15.
A
B
C

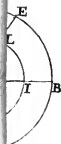

B
14.
A
C

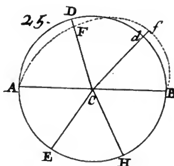

16.
D
A
B
C

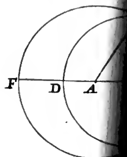



21.
D
A
C
B
E

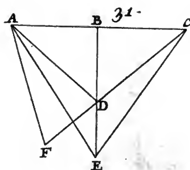

A
C
D

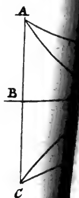

E
L
I
B

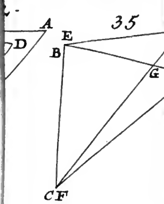

25.
D
F
d
f
A
C
B
E
H

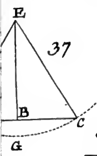

F
D
A

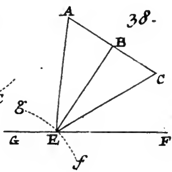

D
C

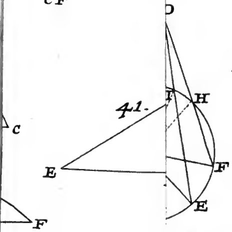

A
B
31.
C
D
F
E

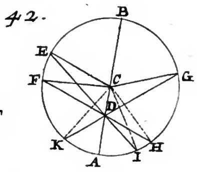

A
B
C

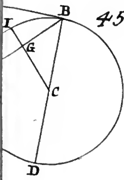

35
A
D
E
B
G
CF

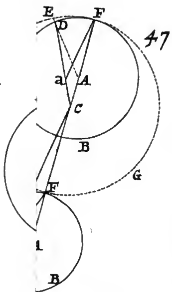

E
37
B
C
G

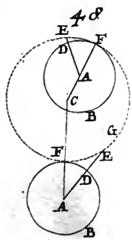

A
38.
B
C
g
G
E
F
f

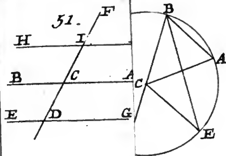

D
41.
H
C
E
F
E
F

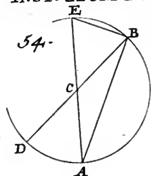

42.
B
E
F
C
G
D
K
A
I
H

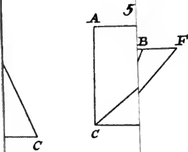

B
45.
I
G
C
D

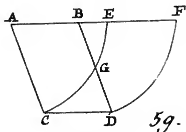

E
F
D
47
a
A
C
B
G
F
B

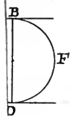

48
E
F
D
A
C
B
G
F
E
D
A
B

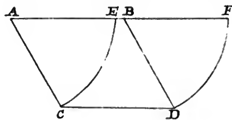

51.
F
H
I
B
C
A
E
D
G
B
A
C
E

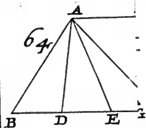

E
B
54.
C
D
A

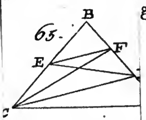

A
5
B
F
C
C

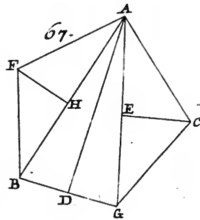

A
B
E
F
G
C
D

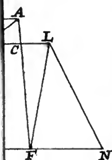

B
F
D

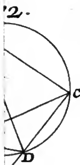

59.
A
E
B
F
C
D

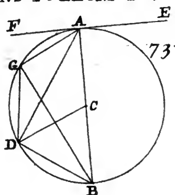

A
64
B
D
E

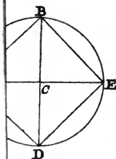

B
65.
F
E
C

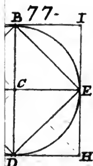

A
67.
F
H
E
C
B
D
G

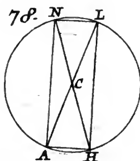

A
C
L
F
N

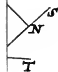

72.
C
D

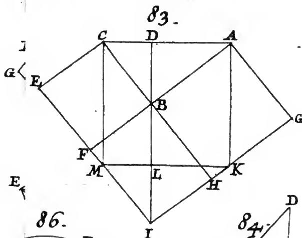

F
A
E
73.
G
C
D
B

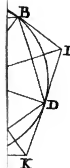

B
C
E
D

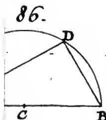

B
77.
I
C
E
D
H

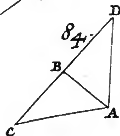

78.
N
L
C
A
H

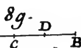

N
T


83.
C
D
A
G
E
B
G
F
M
L
H
K
I

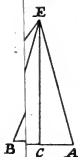

B
I
D
K

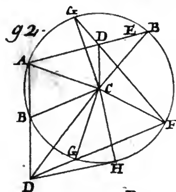

86.
D
C
B

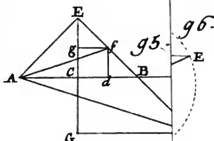

D
84.
B
A
C

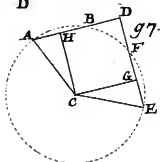

89.
D
C
B

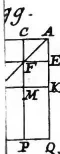

D
C
B

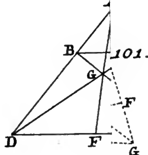

E
B
C
A

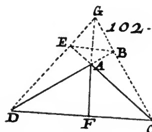

92.
G
D
E
B
A
C
B
F
G
H
D

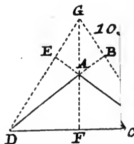

E
g
f
95.
96.
E
A
C
B
d
G

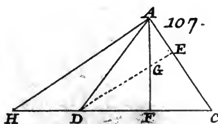

D
B
A
H
97.
F
G
C
E


99.
C
A
E
F
K
M
P
Q

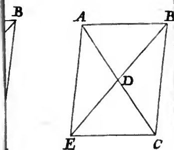

B
101.
G
F
D
F
G

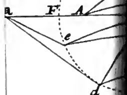

G
102.
E
B
A
D
F
C

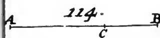

G
10.
E
B
A
D
F
C


A
107.
E
G
H
D
F
C

I


A
B
D
E
C

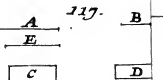

a
F
A
e
d

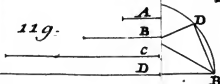

114.
A
B
C

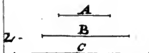

D
E
F

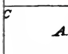
115.

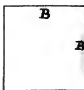

D

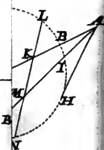

117.
A
B
E
C
D

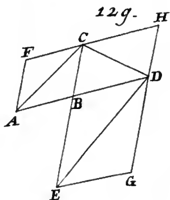

119.
A
D
B
C
D
B

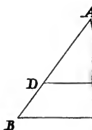

A
B
C

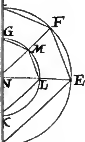

C
A


B

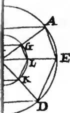

L
A
B
K
I
M
H
B
N



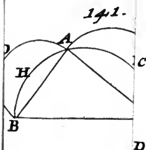


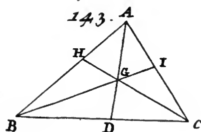


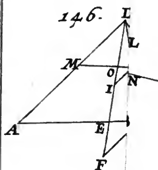
137.

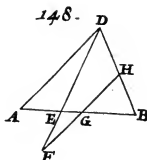


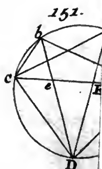


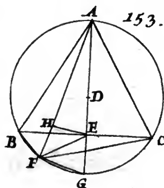

141.
A
H
C
B
D

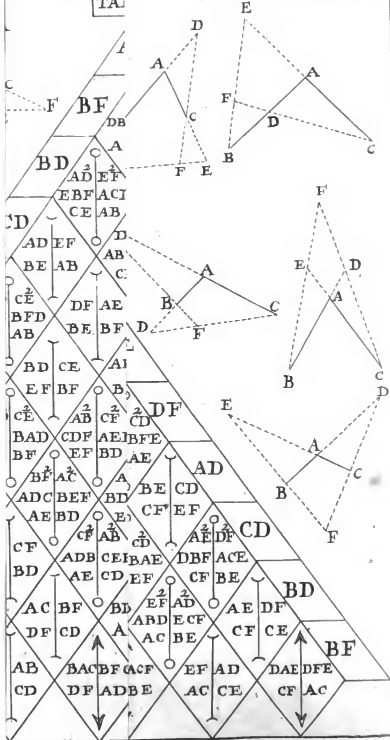

143.
A
H
I
G
B
D
C

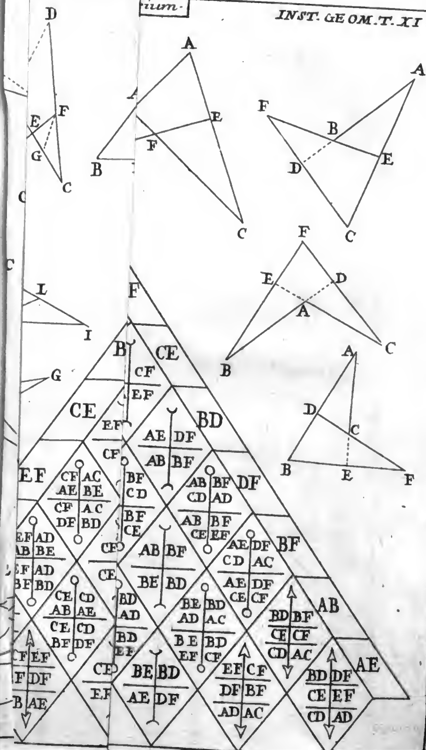

146.
L
M
O
N
I
A
E
F


148.
D
H
A
E
G
B
F

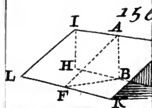

151.
b
c
e
D


A
153.
D
H
E
B
C
F
G


TA
BF
BD
CD
DF
AD
CD
BD
BF
A
B
C
D
E
F



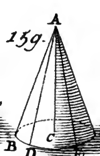
rium.
D
A
A
F
B
E
F
E
G
F
B
C
C
F
D
E
C
C
F
E
D
A
L
I
B
C
A
G
D
C
B
E
F
B
CE
CF
EF
CE
EF
BD
AE DF
AB BF
CF
EF
CF AC
AE BE
CF AC
DF BD
BF
CD
BF
CE
AB BF
CD AD
AB BF
CE EF
DF
EF AD
AB BE
EF AD
BF BD
CF
AB BF
BE BD
AE DF
CD AC
AE DF
CE CF
BF
CE CD
AB AE
CE CD
BF DF
CE
BD
AD
BD
EF
BE BD
AD AC
BE BD
EF CF
BD BF
CE CF
CD AC
AB
CF EF
F DF
B AE
CE
EF
BE BD
AE DF
EF CF
DF BF
AD AC
BD DF
CE EF
CD AD
AE



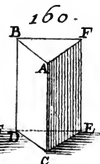
156
I
A
H
B
L
F
K



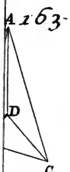
F
E



A
159.
C
F
B
D
E



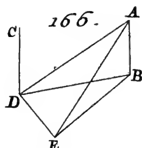
160.
B
F
A
D
E
C



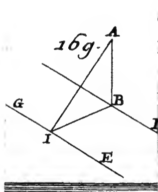
A 163.
D
C



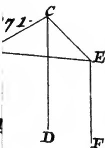
E
B



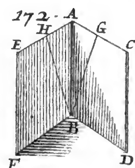
166.
A
C
B
D
E



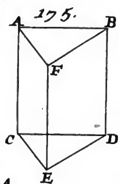
169.
A
B
G
I
E

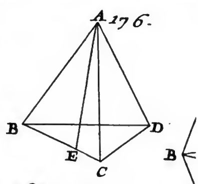


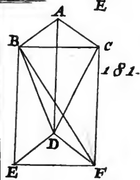
171.
C
E
D
F

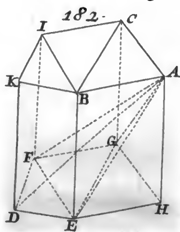


172.
A
H
G
E
C
B
F
D

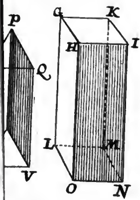

175.
A
B
F
C
D
E

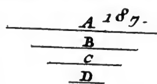

A 176.
B
D
E
C
B
I

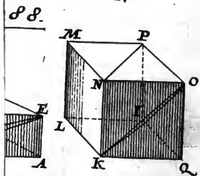

A
B
C
181.
D
E
F

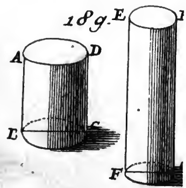

182.
I
C
K
A
B
G
F
D
E
H

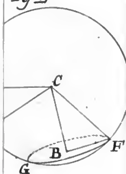

I
F
E

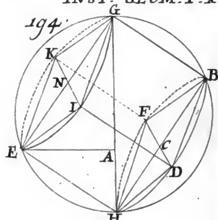

P
G
K
H
I
Q
L
M
V
O
N

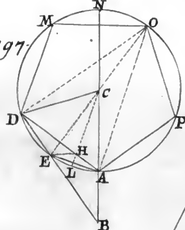

A 187.
B
C
D

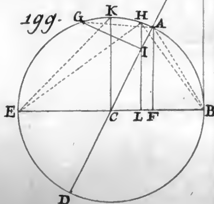

88.
M
P
N
O
E
L
I
A
K
Q


189. E
A
D
L
C
F









Sgrilli sculp.



